ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ

ТРИГОНОМЕТРІЯ

СОСТАВИЛЪ

Н. РЫБКИНЪ,

преподаватель Лазаревскаго института восточныхъ языковъ.

ВЫПУСКЪ ВТОРОЙ,

содержащій дополненіе (къ выпуску первому)
для реальныхъ училищъ.

Цѣна 40 коп.

ИЗДАНІЕ ВТОРОЕ.

МОСКВА.

Изданіе магазина „Сотрудникъ школъ“ А. К. Залѣсской
(Воздвиженка, д. Армандъ).

1905.

Дозволено цензурою. Москва, 18 іюня 1905 г.

Типографія Г. Лисснера и Д. Собко.
Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. Лисснера.

Предисловіе къ первому изданію.

Предлагаемое изданіе содержитъ тѣ статьи тригонометріи, которыя требуются для реальныхъ училищъ сверхъ гимназической программы, а именно: рѣшеніе тригонометричискихъ уравненій, примѣненіе натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ и свѣдѣнія о графическомъ способѣ рѣшенія треугольниковъ.

Главное содержаніе настоящаго выпуска составляетъ статья о рѣшеніи тригонометрическихъ уравненій. Этому отдѣлу тригонометріи въ послѣднее время стали удѣлять болѣе вниманія, чѣмъ прежде, и въ учебной литературѣ и въ практикѣ преподаванія, — соотвѣтственно новымъ учебнымъ планамъ, поставившимъ на болѣе видное мѣсто вопросъ объ уравненіяхъ вообще и въ частности вопросъ о тригонометрическихъ уравненіяхъ. Относительно ихъ въ объяснительной запискѣ къ учебному плану математики говорится: „Тригонометрическія уравненія представляютъ собою весьма хорошій матеріалъ, на которомъ ученики могутъ себѣ усвоить уничтоженіе рѣшеній и введеніе постороннихъ рѣшеній въ уравненія. При рѣшеніи тригонометрическихъ уравненій необходимо заставлять учениковъ выписывать всѣ рѣшенія этихъ уравненій въ видѣ общихъ формулъ“. Кромѣ теоретической стороны они цѣнны въ преподаваніи еще тѣмъ, что даютъ очень много удобныхъ и интересныхъ случаевъ для различныхъ тригонометрическихъ преобразованій. Въ виду всего сказаннаго я и счелъ полезнымъ разобрать тригонометрическія уравненія болѣе подробно, чѣмъ это дѣлается обыкновенно. При этомъ я ограничился *однимъ* неизвѣстнымъ, такъ какъ программа назначаетъ только „простѣйшія“ тригонометрическія уравненія.

Что же касается самой теоріи тригонометрическихъ уравненій, то прежде всего я заботился о выборѣ надежной и ясной точки зрѣнія и о послѣдовательномъ проведеніи ея. Въ виду особаго характера тригонометрическихъ уравненій мнѣ казалось не только болѣе надежнымъ, но и болѣе

простымъ примѣнить къ нимъ точку зрѣнія, принятую въ высшей математикѣ, т.-е. разсматривать рѣшеніе уравненія какъ нахожденіе нулевого значенія для данной функціи неизвѣстнаго. Приложеніе этого пріема читатель найдетъ, напр., въ §§ 7, 13, 20, 22, 24, 26, 30, 31 и 34; нѣкоторые пункты ихъ, какъ мнѣ кажется, имѣютъ и интересъ новизны.

Теперь нѣсколько словъ относительно объема книги. Статья о тригонометрическихъ уравненіяхъ разраслась болѣе, чѣмъ я ожидалъ, вслѣдствіе того, что — для ясности и убѣдительности — я не скупился на пояснительные примѣры къ общимъ положеніямъ теоріи; въ нихъ я касался также и различныхъ частностей вопроса. Я не предполагаю, чтобы учащійся долженъ былъ продѣлать сразу всѣ эти примѣры, но имѣть достаточный запасъ ихъ, хотя бы для справокъ, казалось мнѣ необходимымъ.

Сентябрь 1894.

Второе изданіе отличается отъ перваго лишь незначительными исправленіями.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЯХЪ.

Предварительныя понятія.

1. ***Вступленіе.*** Послѣдующее изложеніе предполагаетъ, что учащійся уже освоился съ *общей* теоріей уравненій, какъ она излагается въ курсахъ элементарной алгебры*). Въ *тригонометрическихъ* уравненіяхъ намъ придется: 1) примѣнять эту теорію въ ея обычномъ содержаніи и 2) мѣстами видоизмѣнять и дополнять ее сообразно частнымъ особенностямъ новыхъ уравненій.

Замѣтимъ еще, что въ этой статьѣ мы будемъ разсматривать только уравненія съ *однимъ* неизвѣстнымъ.

2. Опредѣленіе тригонометрическаго уравненія. *Уравненіе называется тригонометрическимъ, если неизвѣстное служитъ аргументомъ тригонометрической функціи или входитъ въ составъ аргумента***).

Таковы, напр., слѣдующія уравненія (съ неизвѣстными x и α): 1) $\operatorname{sn} x = \operatorname{cs} x$, 2) $\operatorname{sn} 3x = 1$, 3) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$, и т. д.; въ 1-мъ ур-іи неизвѣстный уголъ (или дуга) служитъ аргументомъ тригонометрической функціи, въ 2-мъ ур-іи входитъ въ составъ аргумента***), въ 3-мъ ур-іи то и другое вмѣстѣ.

3. ***Отъ тригонометрическихъ уравненій слѣдуетъ отличать:*** 1) тригонометрическія тождества и 2) тѣ уравненія, которыя хотя и содержатъ тригонометрическія функціи, но не подходятъ подъ сдѣланное выше опредѣленіе. Приводимъ примѣры.

---

*) См. напр. „Элементарную алгебру“ А. Киселева.

**) Или иначе: *если неизвѣстное содержится подъ знакомъ тригонометрической функціи.*

***) Во 2-мъ ур-іи *аргументъ* синуса есть не x, а $3x$.

1) Въ равенствѣ $\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cs}^2 x = 1$ уголъ x можетъ имѣть *какое угодно* значеніе, слѣдов. это есть *тождество;* оно тригонометрическое, такъ какъ перемѣнная величина находится подъ знакомъ тригонометр. функціи*). Но равенство $\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{cs}^2 x = 1$ есть уже *уравненіе,* такъ какъ оно вѣрно не при всѣхъ значеніяхъ x.

Точно такъ же $\operatorname{sn}(90° - \alpha) = \operatorname{cs}\alpha$ есть тригонометрическое тождество, а $\operatorname{sn}(90° - \alpha) = \operatorname{sn}\alpha$ есть уравненіе, и т. д.

2) Уравненіе $x - \operatorname{sn}\alpha = x \,.\, \operatorname{sn}\alpha$, гдѣ α *извѣстно,* нельзя назвать тригонометрическимъ вслѣдствіе того, что неизвѣстное x не находится подъ знакомъ тригонометрической функціи: это есть *алгебраическое* уравненіе съ тригонометрическими коэффиціентами; рѣшая его, получимъ $x = \operatorname{sn}\alpha : (1 - \operatorname{sn}\alpha)$.

4. Корень тригонометрическаго уравненія. То значеніе *неизвѣстнаго,* которое *удовлетворяетъ* тригонометрическому уравненію, т.-е. уравниваетъ обѣ части его, будемъ называть, какъ и въ алгебрѣ, *корнемъ* уравненія. Такъ, для ур-ія $\operatorname{sn} x = \operatorname{cs} x$ *уголъ* 45° есть корень, потому что $\operatorname{sn} 45° = \operatorname{cs} 45°$, и т. п. (См. также § 6).

Такое тригонометрическое уравненіе, которое не удовлетворяется никакими *углами,* будемъ называть *невозможнымъ***). Напримѣръ: ур-іе $(\operatorname{sn} x - 3) \,.\, (\operatorname{sn}^2 x + 4) = 0 \ldots$ (a) *алгебраически* удовлетворяется при $\operatorname{sn} x = 3$ и $\operatorname{sn} x = \pm 2i$, но ни одно изъ этихъ значеній не имѣетъ соотвѣтствующаго себѣ угла; поэтому *тригонометрическое* ур-іе (a) есть невозможное.

5. Равносильныя тригонометрическія уравненія. Будемъ называть два тригонометрическихъ уравненія *равносильными,* если они приводятъ къ однимъ и тѣмъ же *угламъ.* — При этомъ *алгебраическіе* корни ихъ могутъ быть и не одинаковы. Такъ ур-ія $\operatorname{sn} x = 1 \ldots$(a) и $\operatorname{sn}^2 x - 3\operatorname{sn} x + 2 = 0 \ldots$ (b) алгебраически не равносильны, потому что изъ ур-ія (b) получается кромѣ $\operatorname{sn} x = 1$ еще $\operatorname{sn} x = 2$; но $\operatorname{sn} x = 2$ не даетъ никакихъ *угловъ;* а потому относительно x (или относительно *возможныхъ* значеній $\operatorname{sn} x$) ур-ія (a) и (b) равносильны.

6. Расширеніе понятія объ уравненіи. Пусть будетъ $A = B$ какое-нибудь уравненіе. Сдѣлать A равнымъ B — это то же, что

*) Но то же самое соотношеніе, разсматриваемое относительно $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cs} x$, есть *уравненіе* (алгебраическое, неопредѣленное).

**) Понятіе о *мнимой* дугѣ выходитъ уже за предѣлы элементарной математики.

разность $A - B$ обратить въ нуль; такимъ образомъ соотношеніе $A = B$ можно замѣнить соотношеніемъ $A - B = 0$.

Нерѣдко бываетъ, что разность $A - B$, не допуская *обращенія* въ нуль, тѣмъ не менѣе способна *неограниченно приближаться* къ нулю, имѣть его *предѣломъ.* Такіе случаи въ тригонометріи встрѣчаются гораздо чаще, чѣмъ въ алгебрѣ, и по многимъ причинамъ заслуживаютъ разбора; полезно поэтому понятіе уравненія распространить и на эти случаи: тогда корнемъ ур-ія $A = B$ надо будетъ назвать тотъ предѣлъ, къ какому должно стремиться перемѣнное, чтобы разность $A - B$ имѣла предѣломъ нуль.

1) Пусть, напримѣръ, дано: $\dfrac{5}{2 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{3}{2 + \operatorname{tg}^2 x} \cdots$ (a). Здѣсь $A - B$ есть $\dfrac{2}{2 + \operatorname{tg}^2 x}$, и слѣдов. *уравнять* A и B нельзя; но можно *какъ угодно сблизить* ихъ: дѣйствительно, пусть напр. x стремится къ предѣлу 90°; тогда $2 + \operatorname{tg}^2 x$ неограниченно возрастаетъ, а слѣдов. дробь $\dfrac{2}{2 + \operatorname{tg}^2 x}$ имѣетъ предѣломъ нуль. Въ этомъ смыслѣ мы и назовемъ выраженіе (a) уравненіемъ и $x = 90°$ его корнемъ.

2) Еще примѣръ. Уравненіе $\csc 2x = \operatorname{ctg} 2x$ въ *тѣсномъ* смыслѣ слова есть *невозможное,* такъ какъ $\csc 2x$ по абсолютной величинѣ всегда *болѣе* $\operatorname{ctg} 2x$. Но разность $\csc 2x - \operatorname{ctg} 2x$, равная $\operatorname{tg} x$, можетъ имѣть *предѣломъ* нуль: напр. если x неограниченно уменьшается; такимъ образомъ мы скажемъ, что $x = 0$ есть корень уравненія $\csc 2x = \operatorname{ctg} 2x$.

3) Иногда въ одномъ и томъ же уравненіи встрѣчаются *оба* случая. Пусть, напр., дано $\dfrac{1}{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \dfrac{2\operatorname{sn}\alpha}{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Здѣсь $A - B$ есть $\dfrac{1 - 2\operatorname{sn}\alpha}{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$; это выраженіе способно и обращаться въ нуль, напр. при $\alpha = 30°$, и имѣть нуль *только* предѣломъ, напр. если α неограниченно приближается къ 270°.

Замѣчаніе. Второй смыслъ уравненія вытекаетъ также изъ того, что значенія тригонометрическихъ функцій для аргумента 90°. *n* необходимо вездѣ разсматривать какъ *предѣльныя**). Иначе мы будемъ впадать въ противорѣчія; напр. выше было замѣчено,

*) См. § 26 перваго выпуска.

что $\frac{2}{2+\mathrm{tg}^2 x}$ нельзя обратить въ нуль; но $\frac{2}{2+\mathrm{tg}^2 x}$ преобразуется въ $\frac{2\,\mathrm{cs}^2 x}{2\,\mathrm{cs}^2 x+\mathrm{sn}^2 x}$, а полагая *здѣсь* $x=90^\circ$, получимъ $\frac{2\,.\,0^2}{2\,.\,0^2+1^2}$ т.-е. 0; такъ что, если $\mathrm{cs}\,90^\circ=0$ и $\mathrm{sn}\,90^\circ=1$ не разсматривать какъ предѣлы и допустить въ то же время *общность* формулы $\mathrm{ctg}\,x=\mathrm{cs}\,x:\mathrm{sn}\,x$, то получимъ противорѣчіе.

7. Часто даже трудно дать себѣ отчетъ, съ какимъ изъ двухъ разсмотрѣнныхъ случаевъ мы имѣемъ дѣло. Поэтому, во избѣжаніе внутреннихъ противорѣчій, и слѣдуетъ пользоваться только тѣми пріемами рѣшенія, которые вѣрны въ обоихъ случаяхъ безразлично.

Начнемъ съ опредѣленія. Его можно теперь расширить такъ: *рѣшить уравненіе $A=B$ значитъ найти, какія значенія должно имѣть перемѣнное или къ какимъ предѣламъ стремиться, чтобы разность $A-B$ была равна нулю или имѣла нуль предѣломъ.*

Замѣтимъ, что *такое* опредѣленіе дѣлаетъ болѣе *надежной* для рѣшенія формулу $A-B=0$; но имъ не исключается и форма $A=B$: она требуетъ лишь большей осторожности.

Оговоримъ еще, что въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ *выражаться* только такъ, какъ если бы шла рѣчь о *значеніяхъ* неизвѣстнаго (напримѣръ: „*обратить* въ нуль“, „*равно* ∞“ и т. п.); но будемъ при этомъ подразумѣвать и *значенія* и *предѣлы*. Такъ, рѣшая уравненіе $A-B=0$, мы будемъ называть первую часть *равной* нулю; но если бы оказалось, что нуль есть только *предѣлъ* ея, то полученные корни будутъ все-таки пригодны: надо только понимать ихъ какъ предѣлы*).

Вообще въ корняхъ, получаемыхъ нами, нѣкоторые будутъ значеніями перемѣннаго, а нѣкоторые, быть можетъ, только предѣлами. Можно разобраться въ нихъ; но вообще въ этомъ не будетъ надобности.

Мы подробно остановились на этомъ вопросѣ потому, что онъ весьма важенъ для избѣжанія сбивчивости и противорѣчій.

*) *Примѣръ изъ алгебры.* Пусть дано: $2x+\frac{1}{x^2-9}=6+\frac{1}{x^2-9}\ldots$(a). Взявъ *разность* обѣихъ частей, получимъ $2x-6=0\ldots$(b), откуда $x=3$. Этотъ корень удовлетворяетъ и ур-ію (a), — но только какъ *предѣлъ* неизвѣстнаго, потому что при *x равномъ* 3 выраженіе $\frac{1}{x^2-9}$ теряетъ смыслъ.

Какъ было уже замѣчено въ § 6, принятое нами болѣе широкое понятіе объ уравненіи есть лишь естественное слѣдствіе „*общаго принципа*“, указаннаго въ § 26 (перв. вып.).

8. Какую форму имѣетъ окончательное рѣшеніе тригонометрическаго уравненія. Рѣшить тригонометрическое уравненіе значитъ опредѣлить *всѣ* углы (или дуги), которые ему удовлетворяютъ (въ смыслѣ разъясненномъ выше).

Простѣйшій составъ тригонометр. ур-ія есть тотъ, когда имѣется прямо значеніе тригонометр. функціи неизвѣстнаго аргумента: въ этихъ случаяхъ надо только примѣнять §§ 53—59 (перв. вып.). Пусть напр. дано $\mathrm{tg}\,(3x+15^\circ)=1$. Сначала опредѣлимъ *аргументъ* даннаго тангенса, т.-е. $3x+15^\circ$; поступая по § 56, найдемъ $3x+15^\circ=45^\circ+180^\circ.\,n$; отсюда уже находимъ $x=10^\circ+60^\circ.\,n$, гдѣ n есть произвольное цѣлое число. Такимъ образомъ получился *безконечный рядъ* угловъ, удовлетворяющихъ данному уравненію; $10^\circ+60^\circ.\,n$ есть ихъ *общій видъ*.

Такъ какъ неизвѣстный уголъ содержится въ тригонометрическомъ уравненіи не непосредственно, но подъ знакомъ тригоном. функціи, то его можно опредѣлить не иначе, какъ получивъ сперва изъ даннаго уравненія значеніе *функціи (основное, элементарное* ур-іе); и тогда, по § 56, получимъ не одинъ уголъ, а формулу, выражающую безконечный рядъ угловъ. Такимъ образомъ можно сказать, что *рѣшить тригонометрическое уравненіе значитъ опредѣлить общій видъ его корней.*

Но если въ простѣйшемъ ур-іи вторая часть буквенная, то далѣе итти уже нельзя; тогда само это ур-іе и считается *окончательнымъ* отвѣтомъ. Пусть, напр., дано ур-іе $a\,.\,\mathrm{sn}^2 x=b\,.\,\mathrm{sn}\,x$; имѣемъ: $\mathrm{sn}\,x\,(a\,\mathrm{sn}\,x-b)=0$; отсюда: 1) $\mathrm{sn}\,x=0$ и слѣдов. $x=180^\circ.\,n$ и 2) $a\,.\,\mathrm{sn}\,x-b=0$, что даетъ $\mathrm{sn}\,x=\frac{b}{a}$. Такимъ образомъ рѣшеніе придется дать въ слѣдующей формѣ: 1) $x=180^\circ.\,n$; 2) $\mathrm{sn}\,x=\frac{b}{a}$.

9. Раскрытіе неопредѣленности [или нахожденіе истиннаго*) значенія выраженій, принявшихъ видъ: $\frac{0}{0}$, $0\,.\,\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ и т. д.].

*) Слово „истинный“ здѣсь взято въ *условномъ* смыслѣ, какъ будетъ видно далѣе.

Это преобразованіе должно быть знакомо учащемуся отчасти уже изъ алгебры. Въ тригоном. уравненіяхъ оно будетъ встрѣчаться очень часто, и теперь своевременно будетъ выяснить его подробнѣе, въ связи съ изложеннымъ въ §§ 6 и 7. Сдѣлаемъ это на примѣрахъ.

Примѣръ 1. Въ дроби $x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha - \operatorname{cs}\alpha}$ положимъ $\alpha = 45°$; тогда получимъ $x = \dfrac{0}{0}$.

Если α *равно* 45°, то числитель и знаменатель *равны* нулю, и потому значеніе дроби остается *произвольнымъ*.

Но совершенно иное будетъ, если мы станемъ разсматривать 45° не какъ значеніе α, а какъ *предѣлъ* значеній: если числитель и знаменатель стремятся къ нулю, то это еще не исключаетъ опредѣленнаго предѣла для самой дроби; для его нахожденія неудобна только та *форма*, которую имѣетъ дробь. Поэтому преобразуемъ ее. Имѣемъ $1 - \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{cs}\alpha - \operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cs}\alpha}$, и если $\operatorname{sn}\alpha - \operatorname{cs}\alpha$ не равно нулю, то $\dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{sn}\alpha - \operatorname{cs}\alpha} = -\dfrac{1}{\operatorname{cs}\alpha}$; теперь, если α стремится къ 45°, то $\operatorname{cs}\alpha$ приближается къ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а выраженіе $-\dfrac{1}{\operatorname{cs}\alpha}$, и слѣдовательно данная дробь, къ предѣлу $-\sqrt{2}$. Такимъ образомъ неопредѣленность *раскрылась* черезъ *сокращеніе* дроби на $\operatorname{sn}\alpha - \operatorname{cs}\alpha$; но мы не имѣли бы права сдѣлать это сокращеніе, если бы α было *равно* 45°.

Полученное значеніе дроби, т. е. $x = -\sqrt{2}$, *условились* называть также *истиннымъ* значеніемъ x при $\alpha = 45°$. Если мы будемъ разсматривать x какъ функцію α, то $x = -\sqrt{2}$ при $\alpha = 45°$ есть значеніе функціи, полученное согласно *„общему принципу“*, указанному въ § 26 (вып. перваго).

Примѣръ 2. Съ указанной точки зрѣнія опредѣлимъ теперь $x = (1 - \operatorname{cs}\alpha)\,.\,(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)$ при $\alpha = 0$. Непосредственная подстановка даетъ $x = 0\,.\,\infty$. Для раскрытія этой неопредѣленности имѣемъ: $(1 - \operatorname{cs}\alpha)\,.\,(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) = (1 - \operatorname{cs}\alpha)\,.\operatorname{csc}^2\alpha = (1 - \operatorname{cs}\alpha) : \operatorname{sn}^2\alpha = 2\operatorname{sn}^2\dfrac{\alpha}{2} : 4\operatorname{sn}^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{cs}^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 : 2\operatorname{cs}^2\dfrac{\alpha}{2}$. Такимъ образомъ $x = 1 : 2\operatorname{cs}^2\dfrac{\alpha}{2}$, а это при $\alpha = 0$ даетъ $x = \dfrac{1}{2}$.

Примѣръ 3. Выраженіе $x = \operatorname{csc}\alpha - \operatorname{csc}\dfrac{\alpha}{2}$ при $\alpha = 360°$ обращается въ $x = \infty - \infty$. Преобразуя x, получимъ: $\operatorname{csc}\alpha - \operatorname{csc}\dfrac{\alpha}{2} = \left(1 : 2\operatorname{sn}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{cs}\dfrac{\alpha}{2}\right) - \left(1 : \operatorname{sn}\dfrac{\alpha}{2}\right) = \left(1 - 2\operatorname{cs}\dfrac{\alpha}{2}\right) : \operatorname{sn}\alpha$; но послѣднее выраженіе при $\alpha = 360°$ даетъ $\dfrac{1 - 2\,.\,(-1)}{0}$ или $\dfrac{3}{0}$, что равно ∞. Это и есть истинное значеніе взятой разности.

Замѣчаніе. Для поясненія сказаннаго, сравнимъ еще $\operatorname{cs}\alpha\,.\operatorname{tg}\alpha$ и $0\,.\operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha = 90°$. Оба произведенія при $\alpha = 90°$ принимаютъ видъ $0\,.\,\infty$; но между первымъ и вторымъ случаемъ есть существенная разница: въ первомъ случаѣ нуль есть *предѣлъ* множимаго, и мы имѣемъ *неопредѣленность*, которую можно раскрыть ($\operatorname{cs}\alpha\,.\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{sn}\alpha$, что при $\alpha = 90°$ даетъ единицу); а во второмъ случаѣ нуль есть *постоянное значеніе* множимаго, которое обращаетъ въ нуль и произведеніе, какъ бы ни возрасталъ $\operatorname{tg}\alpha$.

Нѣкоторыя указанія о пріемахъ рѣшенія.

10. О способахъ рѣшенія вообще. Въ § 8 было показано, что рѣшеніе всякаго тригонометрическаго уравненія сводится къ полученію одного или нѣсколькихъ *основныхъ* уравненій. При этомъ желательно: 1) чтобы результатъ достигался скоро и легко и 2) чтобы полученное основное ур-іе или совокупность таковыхъ были *равносильны**) первоначальному ур-ію (иначе необходимъ *разборъ* корней). Но мы убѣдимся впослѣдствіи, что не всегда

---

*) Во время рѣшенія, замѣняя одно ур-іе другимъ, мы или преобразуемъ *отдѣльныя* части съ помощью тождествъ, или надъ *обѣими* частями ур-ія производимъ *одно и то же дѣйствіе*. Напримѣръ:

1) Ур-іе $2\operatorname{sn}x\,.\operatorname{cs}x = \operatorname{tg}x\,.\operatorname{ctg}x$ можно замѣнить ур-іемъ $\operatorname{sn}2x = 1$, пользуясь тождествами $2\operatorname{sn}x\,.\operatorname{cs}x = \operatorname{sn}2x$ и $\operatorname{tg}x\,.\operatorname{ctg}x = 1$. При такомъ переходѣ второе ур-іе, очевидно, *всегда* равносильно первому.

2) Освобождая уравненіе отъ знаменателей, мы умножаемъ обѣ части на одно и то же количество. Въ случаяхъ этого рода возможно, что новое ур-іе и не будетъ равносильно первому.

возможно *совмѣстить* эти два требованія; кромѣ того, нарушеніе равносильности уравненій является въ нѣкоторыхъ случаяхъ *неизбѣжнымъ*.

Такимъ образомъ намъ придется иногда различать пріемы удобные практически и пріемы надежные въ теоретическомъ отношеніи

11. Примѣры рѣшенія тригонометрическихъ уравненій. Разберемъ нѣсколько примѣровъ для поясненія сказаннаго въ §§ 8 и 10.

Замѣтимъ, что одинъ изъ болѣе надежныхъ и вообще удобныхъ пріемовъ рѣшенія — это *привести уравненіе къ одной функціи и къ одному аргументу*. Тогда, принявъ эту функцію за особое неизвѣстное, мы получимъ *алгебраическое* ур-іе*) и, найдя его корни, останется только разобрать, какіе изъ нихъ могутъ быть значеніемъ опредѣляемой функціи.

Этотъ пріемъ мы теперь и покажемъ.

a) $3 \operatorname{sn} x = 2 \operatorname{cs}^2 x$. *Рѣшеніе.* Находимъ *тождественно***) $2 \operatorname{cs}^2 x = 2(1 - \operatorname{sn}^2 x) = 2 - 2 \operatorname{sn}^2 x$; слѣдовательно будемъ имѣть $3 \operatorname{sn} x = 2 - 2 \operatorname{sn}^2 x$ или $\operatorname{sn}^2 x + \frac{3}{2} \operatorname{sn} x - 1 = 0$.

Полагая теперь $\operatorname{sn} x = u$, получимъ алгебраическое ур-іе $u^2 + \frac{3}{2} u - 1 = 0$, откуда $u = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$; -2.

Изъ полученныхъ корней квадратнаго уравненія -2 не можетъ быть значеніемъ синуса, такъ какъ по абсолютной величинѣ превышаетъ единицу.

Такимъ образомъ $\operatorname{sn} x = \frac{1}{2}$. Отсюда, по § 56, $x_1 = 30° + 360°. n$ и $x_2 = 150° + 360°. n$ или, записывая сокращенно,

$$x = 30° + 360°. n;\ 150° + 360°. n.$$

b) $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{ctg} x$. *Рѣшеніе.* Замѣняя $\operatorname{ctg} x$ черезъ $1 : \operatorname{tg} x$ и освобождаясь затѣмъ отъ знаменателя, найдемъ $\operatorname{tg}^2 x = 3$, откуда $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$. Оба значенія для $\operatorname{tg} x$ пригодны**), и мы получимъ

$$x = \pm 60° + 180°. n.$$

*) Алгебраическіе случаи яснѣе съ виду, прозрачнѣе: въ нихъ, какъ убѣдимся, нѣтъ тѣхъ неявностей и не требуется такая осторожность, какъ въ тригонометрическихъ.

**) Т.-е. примѣняя тождество.

***) Для тангенса пригодно вообще *всякое* дѣйствительное значеніе.

c) $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{sn} x$. *Рѣшеніе.* Данное ур-іе можно замѣнить черезъ $\frac{\operatorname{cs} x}{\operatorname{sn} x} = -\operatorname{sn} x$. Отсюда: $\operatorname{cs} x = -\operatorname{sn}^2 x$; $\operatorname{cs} x = \operatorname{cs}^2 x - 1$; $\operatorname{cs}^2 x - \operatorname{cs} x - 1 = 0$; $\operatorname{cs} x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$ или $\operatorname{cs} x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ и $\operatorname{cs} x_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Первое значеніе для косинуса невозможно, такъ какъ оно болѣе единицы; абсолютная величина второго значенія менѣе единицы, и потому оно пригодно. Итакъ $\operatorname{cs} x = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = -2 \operatorname{sn} 18°$, откуда

$$x = \pm 128° 10' 23'' + 360°. n.$$

d) $2 \operatorname{sn}^2 x - 3 \operatorname{cs}^2 x = 5 \operatorname{sn} x \operatorname{cs} x$. *Рѣшеніе.* Раздѣлимъ обѣ части ур-ія на $\operatorname{cs}^2 x$ и примѣнимъ тождество $\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cs} x} = \operatorname{tg} x$*); получимъ послѣдовательно:

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 3 = 5 \operatorname{tg} x;\quad \operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{2} \operatorname{tg} x - \frac{3}{2} = 0;\quad \operatorname{tg} x = 3,\ -\frac{1}{2};$$

$$x = 71° 33' 54'' + 180°. n;\quad -26° 33' 54'' + 180°. n.$$

e) $3 \operatorname{sn} x + 4 \operatorname{cs} x = 5$. *Рѣшеніе.* Воспользуемся тѣмъ, что $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cs} x$ выражаются *раціонально* черезъ $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; примѣняя § 71 (вып. перв.), будемъ имѣть

$$\frac{6 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{4\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 5.$$

Освобождаясь отъ знаменателя и приводя новое ур-іе къ нулю, получимъ $9 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$ или $\left(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0$, откуда $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$; далѣе найдемъ $\frac{x}{2} = 18° 26' 6'' + 180°. n$ и слѣдоват. $x = 36° 52' 12'' + 360°. n$.

*) Мы переходимъ на функцію, какой *нѣтъ* въ данномъ уравненіи, потому что переходъ на sn или cs привелъ бы къ уравненію *ирраціональному*, что было бы неудобно.

f) $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{sn} 2x = 1$. *Рѣшеніе.* Имѣемъ тождество: $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{sn} 2x = \frac{\operatorname{cs} x}{\operatorname{sn} x} \cdot 2 \operatorname{sn} x \operatorname{cs} x = 2 \operatorname{cs}^2 x$; такимъ образомъ $2 \operatorname{cs}^2 x = 1$, откуда $\operatorname{cs} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Положительное значеніе $\operatorname{cs} x$ даетъ $x = \pm 45° + 360°.n$, а при отрицательномъ получимъ $x = \pm 135° + 360°.n$.

Итакъ $x = \pm 45° + 360°.n$; $\pm 135° + 360°.n$.

Замѣчаніе. Полученныя четыре прогрессіи можно соединить въ одну; а именно, замѣтимъ, что

дуги ряда	$45° + 360°.n$	оканчиваются въ серединѣ	I четверти.
„ „	$-45° + 360°.n$	„ „ „	IV „
„ „	$135° + 360°.n$	„ „ „	II „
„ „	$-135° + 360°.n$	„ „ „	III „

Отсюда видно, что *всѣ* эти дуги можно выразить *одной* формулой: $x = 45° + 90°.m$.

g) $\operatorname{sn} 2x = \operatorname{sn}^2 x - \operatorname{cs}^2 x$. *Рѣшеніе.* На основаніи тождества $\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{cs}^2 x = -\operatorname{cs} 2x$ данное ур-іе замѣнится такимъ: $\operatorname{sn} 2x = -\operatorname{cs} 2x$. Дѣля здѣсь обѣ части на $\operatorname{cs} 2x$, получимъ $\operatorname{tg} 2x = -1$, откуда $2x = -45° + 180°.n$ и слѣдов. $x = -22° 30' + 90°.n$.

h) $\operatorname{cs}\left(180° + \frac{x}{3}\right) \cdot \operatorname{cs}\left(270° + \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{4}$. *Рѣшеніе.* Имѣемъ тождественно: $\operatorname{cs}\left(180° + \frac{x}{3}\right) = -\operatorname{cs}\frac{x}{3}$ и $\operatorname{cs}\left(270° + \frac{x}{3}\right) = \operatorname{sn}\frac{x}{3}$. Поэтому данное ур-іе замѣнится такимъ: $-\operatorname{cs}\frac{x}{3} \cdot \operatorname{sn}\frac{x}{3} = \frac{1}{4}$; умножая обѣ части на -2 и зная, что $2 \operatorname{cs}\frac{x}{3} \operatorname{sn}\frac{x}{3} = \operatorname{sn}\left(2 \cdot \frac{x}{3}\right)$, получимъ $\operatorname{sn}\frac{2x}{3} = -\frac{1}{2}$; отсюда $\frac{2x}{3} = -30° + 360°.n$; $-150° + 360°.n$ и слѣдов. $x = -45° + 540°.n$; $-225° + 540°.n$.

Что касается вопроса о *равносильности* уравненій въ приведенныхъ примѣрахъ, то мы возвратимся къ нему впослѣдствіи, когда учащійся получитъ средства для его рѣшенія, а пока ограничимся утвержденіемъ, что равносильность вездѣ соблюдена.

12. Примѣры потери корней и полученія постороннихъ. Цѣль этихъ примѣровъ — пока только обратить вниманіе учащагося на ту осторожность, какой требуетъ рѣшеніе уравненій; теоретическій же разборъ ихъ будетъ данъ впослѣдствіи.

8сл **Примѣръ 1.** $2 \operatorname{sn} x - 3 \operatorname{cs} x = 3$. *Рѣшеніе.* Поступая *такъ же*, какъ въ § 11 *e*, получимъ

$$\frac{4 \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{3\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 3;$$

по освобожденіи отъ знаменателя будемъ имѣть $4 \operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 + 3 \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 3 + 3 \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ или $4 \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 6$, откуда $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$. Но это рѣшеніе *неполное:* такъ, напримѣръ, первоначальное ур-іе удовлетворяется при $x = 180°$*), а между тѣмъ этого угла нельзя получить изъ окончательнаго ур-ія; такимъ образомъ оно не равносильно первоначальному: причиною служитъ освобожденіе отъ знаменателя**).

Примѣръ 2. Уравненіе предыдущаго примѣра рѣшимъ иначе. Имѣемъ послѣдовательно: $2 \operatorname{sn} x - 3 \operatorname{cs} x = 3$; $2 \operatorname{sn} x = 3(1 + \operatorname{cs} x)$; $2 \cdot 2 \operatorname{sn}\frac{x}{2} \operatorname{cs}\frac{x}{2} = 3 \cdot 2 \operatorname{cs}^2\frac{x}{2} \cdots$ (a). Въ этомъ ур-іи *можно* обѣ части раздѣлить на 2; но дѣля на $\operatorname{cs}\frac{x}{2}$, мы потеряемъ часть корней; дѣйствительно, сравнимъ ур-іе (a) съ ур-іемъ $4 \operatorname{sn}\frac{x}{2} = 6 \operatorname{cs}\frac{x}{2} \cdots$ (b): всѣ корни ур-ія $\operatorname{cs}\frac{x}{2} = 0$ удовлетворяютъ ур-ію (a), такъ какъ приводятъ къ равенству $2 \cdot 2 \cdot (\pm 1) \cdot 0 = 3 \cdot 2 \cdot 0^2$ или $0 = 0$, но не удовлетворяютъ ур-ію (b), такъ какъ даютъ $4 \cdot (\pm 1) = 6 \cdot 0$***).

Примѣръ 3. Возьмемъ ур-іе § 11 *e* и рѣшимъ его приведеніемъ къ одной изъ функцій, *содержащихся въ немъ,* напр. къ $\operatorname{sn} x$.

Имѣемъ $3 \operatorname{sn} x + 4 \operatorname{cs} x = 5 \ldots$ (a); отсюда $4 \operatorname{cs} x = 5 - 3 \operatorname{sn} x \ldots$ (b); возводимъ обѣ части въ квадратъ: $16 \operatorname{cs}^2 x = 25 - 30 \operatorname{sn} x + 9 \operatorname{sn}^2 x$; примѣняя тождество $\operatorname{cs}^2 x = 1 - \operatorname{sn}^2 x$, получимъ $16(1 - \operatorname{sn}^2 x) =$

---

*) $2 \operatorname{sn} 180° - 3 \operatorname{cs} 180° = 2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) = 3$.

**) Впослѣдствіи будетъ показано, что при освобожденіи ур-ія отъ знаменателей (вообще, при умноженіи обѣихъ частей на одно и то же количество) возможны всѣ три случая: равносильность, потеря корней и полученіе лишнихъ.

***) Впослѣдствіи будетъ показано, что при дѣленіи обѣихъ частей ур-ія на одно и то же количество возможны также всѣ три случая въ корняхъ.

$25 - 30 \operatorname{sn} x + 9 \operatorname{sn}^2 x$; отсюда $25 \operatorname{sn}^2 x - 30 \operatorname{sn} x + 9 = 0$ или $(5 \operatorname{sn} x - 3)^2 = 0$, а слѣдов. $\operatorname{sn} x = \frac{3}{5} \cdots$ (c).

Покажемъ, что ур-iя (c) и (a) не равносильны. Дѣйствительно, углы x, удовлетворяющiе ур-iю (c), оканчиваются или въ I четверти, или во II; въ первомъ случаѣ мы получимъ $\operatorname{cs} x = \frac{4}{5}$ и ур-iе (a) будетъ удовлетворено, а второй случай дастъ $\operatorname{cs} x = -\frac{4}{5}$, что̀ для ур-iя (a) непригодно. Такимъ образомъ нѣкоторые изъ полученныхъ нами корней будутъ *лишнiе:* причиною послужило возвышенiе въ квадратъ ур-iя (b)*).

13. ***Переходъ къ вопросу о равносильности уравненiй.*** Въ *тригонометрическихъ* уравненiяхъ, согласно § 7, слѣдуетъ по возможности держаться формы $M = 0$, какъ болѣе соотвѣтствующей *обобщенному* смыслу уравненiя. Такимъ образомъ, если уравненiе дано въ формѣ $A = B$, то для рѣшенiя надо сперва перенести всѣ члены въ одну часть**) и затѣмъ, упростивъ полученное выраженiе, опредѣлить способы, какими можно его обратить въ нуль.

Но этотъ прiемъ, будучи естественнымъ и самымъ надежнымъ, не всегда удобенъ и кратокъ; поэтому кромѣ него мы разсмотримъ и тѣ прiемы, гдѣ пользуются формой $A = B$.

По поводу этой формы замѣтимъ сейчасъ же, что изъ опредѣленiя, даннаго въ § 7, непосредственно слѣдуетъ равносильность уравненiй:

$$A = B, \quad A + C = B + C \quad \text{и} \quad A - C = B - C;$$

дѣйствительно, въ каждомъ изъ этихъ уравненiй *разность* обѣихъ частей есть $A - B$, какой бы ни былъ составъ C.

Въ уравненiяхъ вида $M = 0$ особаго вниманiя заслуживаютъ случаи, когда первая часть есть произведенiе или дробь. Съ нихъ мы и начнемъ нашъ разборъ.

---

*) Посторопнiе корни принадлежатъ ур-iю $3 \operatorname{sn} x - 4 \operatorname{cs} x = 5$ (въ уравненiи, которое возвышалось въ квадратъ, мѣняемъ знакъ одной части).

Впослѣдствiи будетъ показано, что при возвышенiи уравненiя въ степень возможны также всѣ три случая въ корняхъ.

**) Или, какъ говорятъ, привести уравненiе къ нулю.

Обращенiе въ нуль произведенiя.

14. Общее замѣчанiе. Произведенiе можетъ обратиться*) въ нуль не иначе, какъ если одинъ или нѣсколько множителей будутъ равны нулю; такимъ образомъ это условiе *необходимое.* Но оно *не достаточно,* т.-е. возможны случаи, что удовлетворивъ ему, мы получимъ произведенiе все-таки *не* равное нулю; а именно: обращая какой либо множитель въ нуль, надо слѣдить, не обращается ли при этомъ произведенiе остальныхъ въ ∞**), и если это происходитъ, то изслѣдовать полученную неопредѣленность (вида: $0 \cdot \infty$); но здѣсь и можетъ оказаться, что *произведенiе* не равно нулю.

Такимъ образомъ, если ур-iе $M = 0$ рѣшаемъ съ помощью разложенiя M на множители, то необходимо *испытывать* получаемые корни.

Слѣдующими примѣрами поясняются подробности вопроса.

15. Примѣры. ***Случай двухъ множителей.***

I. $\operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0 \ldots$ (a). *Рѣшенiе.* 1) Полагая $\operatorname{ctg} 2x = 0 \ldots$ (b), найдемъ: $2x = 90° + 180° \cdot n$, $x = 45° + 90° \cdot n$. Подставляемъ найденные корни во 2-й множитель: $\operatorname{tg}(45° + 90° \cdot n)$ не $= \infty$***); слѣдов. въ произведенiи получимъ 0, и $x = 45° + 90° \cdot n$ удовлетворяетъ не только ур-iю (b), но и ур-iю (a). 2) Полагаемъ $\operatorname{tg} x = 0 \ldots$ (c), откуда $x = 180° \cdot n$. Подставляя въ произведенiе, получимъ: $\operatorname{ctg}(360° \cdot n) \cdot \operatorname{tg}(180° \cdot n) = \infty \cdot 0$. Чтобы раскрыть эту неопредѣленность, преобразуемъ произведенiе $\operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{tg} x$; имѣемъ тождественно: $\operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2}$; а $\frac{1 - \operatorname{tg}^2(180° \cdot n)}{2}$ равно $\frac{1}{2}$. Такимъ образомъ, обращая $\operatorname{tg} x$ въ нуль, мы обратимъ произведенiе $\operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{tg} x$ не въ нуль, а въ $\frac{1}{2}$.

Итакъ, всѣ корни ур-iя (a) содержатся въ формулѣ $x = 45° + 90° \cdot n$.

---

*) Напоминаемъ сказанное въ § 7 относительно *оборотовъ рѣчи.*

**) Въ послѣдующемъ намъ нѣтъ надобности различать $+\infty$ и $-\infty$; поэтому будемъ писать просто: ∞.

***) Концами дугъ $45° + 90° \cdot n$ служатъ *середины* четвертей.

Замѣчаніе. Изъ предыдущаго видно, что ур-іе (a) можно замѣнить ур-іемъ $\frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{2}=0$... (d); отсюда $\mathrm{tg}\,x=\pm 1$ и слѣдов. $x=\pm 45°+180°.\,n$. Таким образомъ мы получили то же самое рѣшеніе въ иной *формѣ* *).

II. $\csc^2 2x.\mathrm{sn}\,x=0$ ... (a). *Рѣшеніе.* 1) Предположеніе $\csc 2x=0$ невозможно по свойству косеканса. 2) Полагаемъ $\mathrm{sn}\,x=0$; отсюда $x=180°.\,n$. Подставляемъ въ произведеніе: $\csc^2(360°.\,n).\,\mathrm{sn}(180°.\,n)=\infty.\,0$. Для раскрытія этой неопредѣленности имѣемъ:

$$\csc^2 2x\,.\,\mathrm{sn}\,x=\frac{1}{\mathrm{sn}^2 2x}\cdot\mathrm{sn}\,x=\frac{1}{4\,\mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{cs}^2 x}\cdot\mathrm{sn}\,x=\frac{1}{4\,\mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}^2 x};$$

подставляя сюда $x=180°.\,n$, получимъ $\frac{1}{4\,.\,0\,.\,1}$, что равно ∞. Такимъ образомъ произведеніе обращается не въ 0, а въ ∞.

Изъ 1) и 2) вмѣстѣ видно, что ур-іе (a) есть *невозможное*.

III. $\mathrm{tg}\frac{x}{2}(1+\mathrm{cs}\,x)=0$... (a). *Рѣшеніе.* 1) $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0$... (b); $\frac{x}{2}=180°.\,n$, $x=360°.\,n$. Такъ какъ $1+\mathrm{cs}\,x$ не способно обратиться въ ∞, то окончательно получимъ 0. 2) $1+\mathrm{cs}\,x=0$... (c); $\mathrm{cs}\,x=-1$; $x=180°+360°.\,n$. Подставляя въ произведеніе, получимъ $\infty.\,0$. Раскрываемъ неопредѣленность: $\mathrm{tg}\frac{x}{2}(1+\mathrm{cs}\,x)=$
$=\left(\mathrm{sn}\frac{x}{2}:\mathrm{cs}\frac{x}{2}\right).\,2\,\mathrm{cs}^2\frac{x}{2}=\mathrm{sn}\frac{x}{2}.\,2\,\mathrm{cs}\frac{x}{2}=\mathrm{sn}\,x$; подстановка $x=180°+360°.\,n$ даетъ $\mathrm{sn}(180°+360°.\,n)=0$. Такимъ образомъ здѣсь $\infty.\,0$ разрѣшается въ 0, и корни ур-ія (c) пригодны и для (a).

Итакъ, ур-іе (a) равносильно совокупности ур-ій (b) и (c); такъ что окончательно будемъ имѣть $x=360°.\,n$; $180°+360°.\,n$ или, короче, $x=180°.\,m$.

Замѣчаніе. Рѣшеніе $x=180°.\,m$ получается *сразу*, если мы ур-іе (a) замѣнимъ черезъ $\mathrm{sn}\,x=0$. Этотъ случай показываетъ, между прочимъ, выгоду удачно направленныхъ *предварительныхъ* преобразованій.

IV. $\mathrm{ctg}\,x\,.\,\mathrm{sn}\,3x=0$... (a). *Рѣшеніе.* 1) $\mathrm{ctg}\,x=0$... (b); $x=90°+180°.\,n$. Такъ какъ $\mathrm{sn}\,3x$ не можетъ обратиться въ ∞, то въ произведеніи получимъ 0. 2) $\mathrm{sn}\,3x=0$... (c); $3x=180°.\,n$, $x=60°.\,n$. Что касается произведенія, то замѣтимъ, что $\mathrm{ctg}(60°.\,n)$

*) Объ этомъ см. также въ „Прибавленіяхъ“.

при *нѣкоторыхъ* n обращается въ ∞, а именно, если n есть число кратное трехъ*). Полагая $n=3\kappa$, получимъ $\mathrm{ctg}(60°.\,3\kappa)=$ $=\mathrm{ctg}(180°.\,\kappa)=\infty$, а слѣдов. въ произведеніи получимъ $\infty.\,0$.

Раскрываемъ неопредѣленность: $\mathrm{ctg}\,x.\,\mathrm{sn}\,3x=\frac{\mathrm{cs}\,x}{\mathrm{sn}\,x}(3\,\mathrm{sn}\,x-4\,\mathrm{sn}^3 x)=$ $=\mathrm{cs}\,x(3-4\,\mathrm{sn}^2 x)$; подставляя сюда $x=180°.\,\kappa$, получимъ либо $1.\,3$, либо $(-1).\,3$. Такимъ образомъ изъ корней ур-ія (c) удовлетворяютъ ур-ію (a) только тѣ, которые получаются при n не дѣлящемся на 3; общій видъ такихъ чиселъ есть $3\kappa\pm 1$**); слѣдов. ур-іе (c) даетъ для ур-ія (a) только слѣдующіе корни: $x=60°(3\kappa\pm 1)$.

Итакъ, окончательно, полное рѣшеніе ур-ія (a) есть

$$x=90°+180°.\,n;\quad 60°(3\kappa\pm 1).$$

Въ этомъ примѣрѣ мы имѣемъ, что ур-ію (a) удовлетворяютъ *всѣ* корни ур-ія (b) и *нѣкоторые* изъ корней ур-ія (c).

V. Въ предыдущемъ примѣрѣ преобразованіе первой части привело къ ур-ію $\mathrm{cs}\,x(3-4\,\mathrm{sn}^2 x)=0$. Здѣсь оба множителя не обратимы въ ∞, поэтому разбора корней не придется дѣлать. Получимъ: 1) $\mathrm{cs}\,x=0$; $x=90°+180°.\,n$. 2) $3-4\,\mathrm{sn}^2 x=0$; $\mathrm{sn}\,x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=\pm 60°+360°.\,n$; $\pm 120°+360°.\,n$.

Итакъ, окончательно,

$$x=90°+180°.\,n;\quad \pm 60°+360°.\,n;\quad \pm 120°+360°.\,n\ ***).$$

16. *Случай, когда произведеніе содержитъ болѣе двухъ множителей.* Къ сказанному выше добавимъ только слѣдующее: если множителей болѣе двухъ, то получаемые корни надо подставлять не только въ тѣ множители, которые обратимы въ ∞, но и въ тѣ, которые способны обратиться въ 0****); пропускъ такой подстановки можетъ повести къ ошибкѣ. Приводимъ примѣръ.

*) О случаяхъ этого рода см. также въ „Прибавленіяхъ“.

**) Для наглядности приводимъ примѣръ:

	$3k-1$	$3k$	$3k+1$	$3k-1$	$3k$	$3k+1$	
...4	5	6	7	8	9	10	11...

***) О сравненіи этого отвѣта съ полученнымъ въ прим. IV см. въ „Прибавленіяхъ“.

****) Не считая, конечно, того множителя, съ помощью котораго получены самые корни.

Пусть дано ур-іе $\operatorname{sn} 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0 \ldots$ (a), и требуется испытать корни ур-ія $\operatorname{tg} x = 0$, т.-е. углы $x = 180°. n$.

Сдѣлаемъ подстановку кромѣ $\operatorname{tg} x$ еще только туда, гдѣ возможны безконечныя значенія, т.-е. въ $\operatorname{ctg} 2x$. По § 15 прим. I 2) получимъ: $\operatorname{ctg}(360°. n) \cdot \operatorname{tg}(180°. n) = \infty \cdot 0 = \frac{1}{2}$; слѣдоват. корень $x = 180°. n$ по *этой* повѣркѣ не удовлетворяетъ уравненію (a). Но сдѣлаемъ *полную* подстановку: $\operatorname{sn}(540°. n) \cdot \operatorname{ctg}(360°. n) \cdot \operatorname{tg}(180°. n) \overset{*)}{=} 0 \cdot \infty \cdot 0 = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Такимъ образомъ, на самомъ дѣлѣ, корень $x = 180°. n$ пригоденъ для ур-ія (a), и, не принявъ во вниманіе $\operatorname{sn} 3x$, мы сдѣлали бы ошибку.

Вообще, для *способа произведенія* можно дать слѣдующее практическое указаніе: 1) *опускаемъ* тѣ множители, которые не способны ни къ 0, ни къ ∞; 2) послѣ этого каждый разъ**) дѣлаемъ *сплошную* подстановку.

Обращеніе въ нуль дроби.

17. Общее замѣчаніе. Чтобы дробь обратилась въ нуль, *необходимо:* или a) числителя обратить въ нуль, или b) знаменателя обратить въ ∞. Но этого *не достаточно:* a) если вмѣстѣ съ числителемъ обратится въ нуль и знаменатель, то, раскрывая неопредѣленность $\frac{0}{0}$, мы для дроби не всегда получимъ нуль; b) если вмѣстѣ съ знаменателемъ обратится въ ∞ и числитель, то неопредѣленность $\frac{\infty}{\infty}$ также не всегда разрѣшается въ нуль.

Отсюда слѣдуетъ, что получаемые корни требуютъ *испытанія* (подстановкой въ числителя и знаменателя).

Алгебраическій случай. Если числитель и знаменатель суть относительно неизвѣстнаго выраженія *цѣлыя и раціональныя*, то

*) $540°. n = 180°. 3n$.

**) Т.-е. при каждомъ испытаніи корней.

обращеніе въ нуль числителя приводитъ къ цѣли, когда дробь не сократима*), а въ обращеніе въ ∞ знаменателя, — когда степень знаменателя**) выше степени числителя.

18. Примѣры. I. $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{cs} x} = 0 \ldots$ (a). *Рѣшеніе.* 1) Полагаемъ $\operatorname{tg} x = 0 \ldots$ (b); тогда $x = 180°. n$. Подставляя въ дробь, получимъ: a) если $n = 2\kappa$***), то $\frac{\operatorname{tg}(360°. \kappa)}{1 + \operatorname{cs}(360°. \kappa)} = \frac{0}{1+1} = 0$; b) если $n = 2\kappa + 1$, то $\frac{\operatorname{tg}(360°. \kappa + 180°)}{1 + \operatorname{cs}(360°. \kappa + 180°)} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$. Для раскрытія этой неопредѣленности имѣемъ:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{cs} x} = \frac{\operatorname{sn} x}{1 + \operatorname{cs} x} \cdot \operatorname{sc} x = \left(2 \operatorname{sn}\frac{x}{2} \operatorname{cs}\frac{x}{2} : 2 \operatorname{cs}^2\frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{sc} x = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \cdot \operatorname{sc} x;$$

а это при $x = 180°(2\kappa+1)$ даетъ $\operatorname{tg} 90°(2\kappa+1) \cdot \operatorname{sc} 180°(2\kappa+1) = \operatorname{tg} 90° \cdot \operatorname{sc} 180° = \infty \cdot -1$. Такимъ образомъ изъ корней уравненія (b) удовлетворяютъ ур-ію (a) только $x = 180°. 2\kappa = 360°. \kappa$.

2) Знаменатель не доставитъ новыхъ корней, такъ какъ $1 + \operatorname{cs} x$ нельзя обратить въ ∞.

Итакъ, корни ур-ія (a) суть $x = 360°. \kappa$.

II. $\frac{1 - \operatorname{cs} 2x}{\operatorname{sn} 2x} = 0 \ldots$ (a). *Рѣшеніе.* 1) $1 - \operatorname{cs} 2x = 0$; $2x = 360°. n$, $x = 180°. n$. Подстановка: $\frac{1 - \operatorname{cs}(360°. n)}{\operatorname{sn}(360°. n)} = \frac{0}{0}$. Раскрытіе неопредѣленности: $\frac{1 - \operatorname{cs} 2x}{\operatorname{sn} 2x} = \frac{2 \operatorname{sn}^2 x}{2 \operatorname{sn} x \cdot \operatorname{cs} x} = \operatorname{tg} x$; $\operatorname{tg}(180°. n) = 0$. Такимъ образомъ корень $x = 180°. n$ удовлетворяетъ ур-ію (a).

2) Знаменатель не обращается въ ∞.

Итакъ, корни ур-ія (a) выражаются формулой $x = 180°. n$.

III. $\frac{2 + \operatorname{cs} x}{2 + \operatorname{ctg} x} = 0 \ldots$ (a). *Рѣшеніе.* 1) Числитель не обращается въ нуль. 2) Полагаемъ $2 + \operatorname{ctg} x = \infty$; для этого должно быть $\operatorname{ctg} x = \infty$, откуда $x = 180°. n$. Такъ какъ $2 + \operatorname{cs} x$ не можетъ быть равно ∞, то дробь обратится въ 0.

Итакъ, корни ур-ія (a) суть $x = 180°. n$.

*) На дѣлитель, содержащій неизвѣстное.

**) Относительно неизвѣстнаго.

***) Мы *подраздѣляемъ* изслѣдованіе, потому что знакъ $\operatorname{cs}(180°. n)$ зависитъ отъ четности или нечетности n [$\operatorname{cs}(180°. n) = (-1)^n$].

IV. Рѣшимъ изъ § 12 прим. 1 ур-іе $\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{3\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 3.$

Полагая, для краткости, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$ и приводя уравненіе къ нулю, получимъ $\frac{4u-3(1-u^2)-3(1+u^2)}{1+u^2}=0$ или $\frac{4u-6}{1+u^2}=0\ldots$(a).

1) Полагаемъ $4u-6=0\ldots$(b), откуда $u=\frac{3}{2}$; знаменатель при этомъ не равенъ 0; слѣдов. $u=\frac{3}{2}$ удовлетворяетъ и ур-ію (a).

2) Полагаемъ $1+u^2=\infty$, откуда $u=\infty$; числитель при этомъ обращается также въ ∞, и для дроби получимъ $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть неопредѣленность, раздѣлимъ числителя и знаменателя на u^2; получимъ $\frac{4u-6}{1+u^2}=\left(\frac{4}{u}-\frac{6}{u^2}\right):\left(\frac{1}{u^2}+1\right)$; при $u=\infty$ будемъ имѣть $\frac{0-0}{0+1}$, что̀ равно нулю 0; такимъ образомъ $x=\infty$ удовлетворяетъ ур-ію (a).

Итакъ, данное ур-іе равносильно совокупности двухъ слѣдующихъ: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{3}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\infty$. Изъ нихъ получимъ $\frac{x}{2}=56^\circ\,18'\,36''+180^\circ.\,n$ и $\frac{x}{2}=90^\circ+180^\circ.\,n$; слѣдов. $x=112^\circ 37' 12''+360^\circ.\,n$; $180^\circ+360^\circ.\,n$.

V. $\frac{\csc 2x}{\operatorname{tg} x}=0\ldots$ (a). *Рѣшеніе.* 1) Предположеніе $\csc 2x=0$ невозможно. 2) Полагаемъ $\operatorname{tg} x=\infty$, откуда $x=90^\circ+180^\circ.\,n$; при этомъ для дроби получимъ $\frac{\csc(180^\circ+360^\circ.\,n)}{\operatorname{tg}(90^\circ+180^\circ.\,n)}=\frac{\infty}{\infty}$; раскрываемъ неопредѣленность: $\frac{\csc 2x}{\operatorname{tg} x}=\frac{1}{\operatorname{sn} 2x\,.\,\operatorname{tg} x}=\frac{1}{2\operatorname{sn}^2 x}$, что̀ при $x=90^\circ+180^\circ.\,n$ обращается въ $\frac{1}{2}$.

Такимъ образомъ ур-іе (a) вовсе не имѣетъ корней.

19. Болѣе сложныхъ случаевъ не будемъ разсматривать. Замѣтимъ только, что получаемые корни слѣдуетъ подставлять

въ данной дроби во *всѣ* множители числителя и знаменателя кромѣ тѣхъ, которые не способны обратиться ни въ 0, ни въ ∞ (ср. правило въ § 16).

Умноженіе обѣихъ частей уравненія.

20. Общее замѣчаніе. Требуется сравнить уравненія: $A=B$ и $A\,.\,C=B\,.\,C$. — Замѣняя ихъ черезъ $A-B=0\ldots$(a) и $(A-B)\,.\,C=0\ldots$(b), будемъ имѣть по §§ 14—16:

1. Если C не обратимо ни въ 0, ни въ ∞, то ур-ія (b) и (a) равносильны.

2. Если C обратимо въ 0, то можетъ случиться, что въ ур-іи (b) есть корни, не удовлетворяющіе (a); они будутъ внесены уравненіемъ $C=0$.

3. Если C обратимо въ ∞, то можетъ случиться, что въ ур-іи (a) есть корни, не удовлетворяющіе (b); такими будутъ тѣ, которые дѣлаютъ $C=\infty$, при чемъ $(A-B)\,.\,C=\infty$ не разрѣшается въ 0.

Итакъ, умноженіе обѣихъ частей можетъ дать посторонніе корни и погасить всѣ или нѣкоторые изъ существующихъ.

Замѣтимъ, что въ корняхъ, полученныхъ послѣ умноженія обѣихъ частей, требуютъ разбора только тѣ, которые обращаютъ множитель C въ нуль; потерянные корни слѣдуетъ искать въ уравненіи $C=\infty$*).

Поясннимъ все сказанное примѣрами.

21. Примѣры. I. $\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x\ldots$ (a). *Рѣшеніе.* Умножая обѣ части на $\operatorname{tg} x$ и примѣняя формулу $\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\alpha=1$, получимъ $\operatorname{tg}^2 x=1\ldots$(b), откуда: $\operatorname{tg} x=\pm 1$, $x=\pm 45^\circ+180^\circ.\,n$. Провѣримъ это рѣшеніе — въ виду того, что $C=\operatorname{tg} x$ способно обратиться и въ 0 и въ ∞. 1) Такъ какъ корни ур-ія (b) не дѣ-

---

*) Съ помощью $C=0$ мы отбираемъ *сомнительные* корни (для повѣрочной подстановки въ ур-іе $A=B$).

Весь же процессъ подстановокъ схематически можно представить такъ:

$$A=B$$
$$C=\infty \quad C=0$$
$$A\,.\,C=B\,.\,C$$

ласть $C=0$, то постороннихъ корней нѣтъ; 2) нѣтъ также и потери корней, потому что при $C=\infty$ ур-іе (a) не удовлетворяется. Итакъ, ур-ія (b) и (a) равносильны, и слѣдовательно корни уравненія (a) суть $x=\pm 45^\circ + 180^\circ . n$.

II. $\cs x = 0 \ldots$ (a). *Рѣшеніе.* Умножая обѣ части на $2 \sn x$*), получимъ $2 \sn x \cs x = 0$ или $\sn 2x = 0 \ldots$ (b), откуда $2x = 180^\circ . n$ и слѣдов. $x = 90^\circ . n$. Разберемъ полученные корни. 1) Такъ какъ $C = 2 \sn x$ не обратимо въ ∞, то потери корней нѣтъ. 2) Подставляя $x = 90^\circ . n$ въ $C = 2 \sn x$, при *четныхъ n* получимъ 0, слѣдов. *эти* корни будутъ сомнительные; подставляя теперь $x = 90^\circ . 2\kappa = 180^\circ . \kappa$ въ ур-іе (a), будемъ имѣть въ первой части $\cs(180^\circ . \kappa)$ или $(-1)^k$; такимъ образомъ испытуемые корни оказались посторонними. Итакъ, корни ур-ія (a) выражаются формулой $x = 90^\circ (2\kappa + 1)$.

III. $\ctg x = \ctg^2 x \ldots$ (a). *Рѣшеніе.* Умножая обѣ части на $\tg^2 x$ и примѣняя формулу $\tg \alpha . \ctg \alpha = 1$, получимъ $\tg x = 1 \ldots$ (b), откуда $x = 45^\circ + 180^\circ . n$. Сдѣлаемъ повѣрку. 1) Полученные корни не обращаютъ $\tg^2 x$ въ 0, поэтому они не посторонніе. 2) Полагая $\tg^2 x = \infty$, найдемъ $x = 90^\circ + 180^\circ . n$; подстановка въ ур-іе (a) даетъ $0 = 0$; такимъ образомъ оказалась потеря корней.

Итакъ, правильный отвѣтъ есть: $x = 45^\circ + 180^\circ . n$; $90^\circ + 180^\circ . n$.

22. Освобожденіе уравненія отъ знаменателей. Положимъ, что *общій знаменатель***) есть C и по освобожденіи отъ него получилось $A = B$. Такъ какъ первоначальное уравненіе равносильно $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$, то вопросъ сводится къ сравненію ур-ій $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ и $A = B$ или $\frac{A-B}{C} = 0 \ldots$ (a) и $A - B = 0 \ldots$ (b).

Уравненіе (b) получено изъ ур-ія (a) чрезъ умноженіе на C; поэтому сюда можно отнести все сказанное въ § 20. Но будетъ нагляднѣе примѣнить § 17 и разсуждать такъ: опуская въ дроби знаменатель, мы

1) *можемъ* лишиться способа обратить дробь въ 0 (если C обратимо въ ∞);

*) *Такое* рѣшеніе взято, конечно, только для поясненія теоріи, а не какъ болѣе естественное. Какъ *практическій* пріемъ, умноженіе обѣихъ частей примѣняется преимущественно при освобожденіи отъ знаменателей, но объ этомъ будетъ сказано особо (въ § 22).

**) Въ ариѳметическомъ смыслѣ слова.

2) *можемъ* получить корни непригодные для дроби, а именно тѣ, которые даютъ неопредѣленность $\frac{0}{0}$, не разрѣшающуюся въ 0 (это можетъ случиться, когда C обратимо въ 0);

3) *получимъ* уравненіе равносильное первоначальному, если C не обратимо ни въ 0, ни въ ∞*).

Примѣры. I. Въ § 11 *b* ур-іе $\tg x = \frac{3}{\tg x} \ldots$ (a) было замѣнено ур-іемъ $\tg^2 x = 3 \ldots$ (b). Сравнимъ ихъ: въ настоящемъ случаѣ C есть $\tg x$; $\tg x = \pm\sqrt{3}$ не дѣлаетъ $C = 0$, слѣдов. постороннихъ корней нѣтъ; 2) $C = \infty$ (т.-е. $\tg x = \infty$) не удовлетворяетъ ур-ію (a), слѣдов. нѣтъ и потери корней. Итакъ ур-ія (a) и (b) равносильны. Подобнымъ же образомъ доказывается равносильность уравненій $\frac{\cs x}{\sn x} = -\sn x$ и $\cs x = -\sn^2 x$ въ § 11 *c***).

Для § 11 *e* замѣтимъ слѣдующее: 1) корень уравненія (b) не удовлетворяетъ ур-ію $1 + \tg^2 \frac{x}{2} = 0$, слѣдов. постороннихъ корней нѣтъ; 2) корень ур-ія $1 + \tg^2 \frac{x}{2} = \infty$ не удовлетворяетъ ур-ію (a)***), слѣдовательно нѣтъ и потери корней.

II. Примѣръ потери корней при освобожденіи отъ знаменателя мы имѣли въ § 12 прим. 1; правильное рѣшеніе было указано въ § 18 IV.

Возьмемъ еще ур-іе $\sn x = \frac{\sn x + 2 \cs x}{1 + \ctg x} \ldots$ (a). Освобождаясь отъ знаменателя, получимъ $\sn x + \cs x = \sn x + 2 \cs x$ или $\cs x = 0$, откуда $x = 90^\circ + 180^\circ . n$. Изслѣдуемъ рѣшеніе. 1) Полученный корень не обращаетъ $1 + \ctg x$ въ 0, слѣдов. онъ не посторонній.

*) Считаемъ нелишнимъ отмѣтить, что условія относительно C въ 1) и 2) суть необходимыя, но еще не достаточныя.

**) Замѣтимъ, что вопросъ о постороннихъ корняхъ можно рѣшать и *заранѣе*, напр. въ настоящемъ случаѣ: такъ какъ допущеніе $C = 0$ (т.-е. $\sn x = 0$) не удовлетворяетъ данному ур-ію, то постороннихъ корней не получимъ.

Такое разсужденіе наглядно оправдывается *схемой подстановокъ*, приведенной въ § 20.

***) Подстановка $\tg \frac{x}{2} = \infty$ въ ур-іе (a) даетъ $\frac{6 . \infty}{\infty} + \frac{4(1-\infty)}{\infty} = 5$; неопредѣленность раскрывается какъ показано въ § 18 IV.

2) Полагая $1+\mathrm{ctg}\,x=\infty$, найдемъ $x=180°.\,n$; подстановка въ ур-іе (а) даетъ $0=\dfrac{0+2\,(-1)^n}{\infty}$ или $0=0$; такимъ образомъ оказался потерянный корень.

Итакъ, правильное рѣшеніе ур-ія (а) есть:

$x=90°+180°.\,n$; $180°.\,n$ или, короче, $x=90°.\,m$.

III. $\dfrac{\mathrm{sn}\,2x}{\mathrm{sn}\,x}=\dfrac{\mathrm{cs}\,2x}{\mathrm{cs}\,x}\ldots$(а). *Рѣшеніе.* Освобождаясь отъ знаменателей, получимъ $\mathrm{sn}\,2x\,.\,\mathrm{cs}\,x=\mathrm{cs}\,2x\,.\,\mathrm{sn}\,x$, откуда

$\mathrm{sn}\,2x\,.\,\mathrm{cs}\,x-\mathrm{cs}\,2x\,.\,\mathrm{sn}\,x=0$ или $\mathrm{sn}\,(2x-x)=0$,

что̀ даетъ $x=180°.\,n$.

Въ настоящемъ случаѣ $C=\mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,x$; 1) это выраженіе не обратимо въ ∞, слѣдов. потери корней нѣтъ: 2) $x=180°.\,n$ обращаетъ C въ 0, поэтому требуетъ испытанія. Подставляя въ уравненіе (а), получимъ: $\dfrac{\mathrm{sn}\,(360°.\,n)}{\mathrm{sn}\,(180°.\,n)}=\dfrac{\mathrm{cs}\,(360°.\,n)}{\mathrm{cs}\,(180°.\,n)}$ или $\dfrac{0}{0}=\dfrac{1}{(-1)^n}$; раскроемъ неопредѣленность въ первой части: $\dfrac{\mathrm{sn}\,2x}{\mathrm{sn}\,x}=\dfrac{2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cs}\,x}{\mathrm{sn}\,x}=$ $=2\,\mathrm{cs}\,x$, поэтому первая часть равна $2\,\mathrm{cs}\,(180°.\,n)=2\,.\,(-1)^n$, и ур-іе (а) не удовлетворится.

Такимъ образомъ всѣ *полученные* корни суть посторонніе*), а такъ какъ потери корней не было, то ур-іе (а) *вовсе* не имѣетъ корней**).

IV. $\dfrac{\mathrm{sn}\,x}{1+\mathrm{cs}\,x}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}=2\ldots$(а). *Рѣшеніе.* Находимъ послѣдовательно: $\dfrac{\mathrm{sn}\,x}{1+\mathrm{cs}\,x}+\dfrac{\mathrm{cs}\,x}{\mathrm{sn}\,x}=2$; $\mathrm{sn}^2x+\mathrm{cs}\,x+\mathrm{cs}^2x=2\,\mathrm{sn}\,x+2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cs}\,x$; $1+\mathrm{cs}\,x=2\,\mathrm{sn}\,x.(1+\mathrm{cs}\,x)$; $(1+\mathrm{cs}\,x).(1-2\,\mathrm{sn}\,x)=0$. Это ур-іе удовлетворяется при $1+\mathrm{cs}\,x=0\ldots$(b) и при $1-2\,\mathrm{sn}\,x=0\ldots$(c); изъ (b) получимъ $x=180+360°.\,n$, а изъ (c): $x=30°+360°.\,n$; $150°+360°.\,n$.

Въ настоящемъ случаѣ C есть $(1+\mathrm{cs}\,x)\,\mathrm{sn}\,x$. 1) Это выраженіе не обратимо въ ∞, слѣдов. потери корней нѣтъ. 2) Изъ

*) Они не получились бы, если бы мы *нача и* съ сокращенія дроби $\dfrac{\mathrm{sn}\,2x}{\mathrm{sn}\,x}$.

**) Рѣшая ур-іе (а) *способомъ дроби,* получимъ:
$\dfrac{\mathrm{sn}\,2x}{\mathrm{sn}\,x}-\dfrac{\mathrm{cs}\,2x}{\mathrm{cs}\,x}=0$; $\dfrac{\mathrm{sn}\,(2x-x)}{\mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,x}=0$; $\dfrac{1}{\mathrm{cs}\,x}=0$ или $\mathrm{sc}\,x=0$, что̀ невозможно.

полученныхъ корней $x=180°+360°.\,n$ обращаетъ C въ нуль и потому требуетъ испытанія.

Подстановка его въ ур-іе (а) даетъ $\dfrac{0}{0}+\dfrac{1}{0}=2$; чтобы раскрыть эту неопредѣленность, замѣтимъ, что $\dfrac{\mathrm{sn}\,x}{1+\mathrm{cs}\,x}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}=\dfrac{1+\mathrm{cs}\,x}{(1+\mathrm{cs}\,x)\,\mathrm{sn}\,x}$ $=\dfrac{1}{\mathrm{sn}\,x}$; подставляя $x=180°+360°.\,n$ въ $\dfrac{1}{\mathrm{sn}\,x}$, получимъ $\dfrac{1}{0}$ или ∞. Такимъ образомъ испытуемый корень оказался постороннимъ.

Итакъ, корни даннаго уравненія суть $x=30°+360°.\,n$; $150°+360°.\,n$*).

V. $\dfrac{1}{\mathrm{sn}\,x}=\mathrm{ctg}\,x\ldots$(а). *Рѣшеніе.* Освобождаясь отъ знаменателя, получимъ $1=\mathrm{cs}\,x$, откуда $x=360°.\,n$. Въ этой задачѣ C есть $\mathrm{sn}\,x$. 1) Это выраженіе не обратимо въ ∞, поэтому потери корней нѣтъ. 2) $x=360°.\,n$ обращаетъ C въ нуль, поэтому требуетъ испытанія; подставляя въ данное ур-іе, получимъ $\dfrac{1}{0}=\infty$ или $\infty=\infty$, что̀ въ свою очередь требуетъ разбора: дѣйствительно, полученное показываетъ только, что если x стремится къ предѣлу $360°.\,n$, то обѣ части уравненія (а) неограниченно возрастаютъ, но отсюда еще не видно, стремятся ли онѣ къ равенству между собой; составимъ поэтому разность обѣихъ частей, т.-е. ур-іе (а) замѣнимъ такимъ: $\dfrac{1}{\mathrm{sn}\,x}-\mathrm{ctg}\,x=0$ или $\dfrac{1-\mathrm{cs}\,x}{\mathrm{sn}\,x}=0$. Подставляя въ первую часть $x=360°.\,n$, получимъ $\dfrac{0}{0}$; для раскрытія неопредѣленности замѣтимъ, что $\dfrac{1-\mathrm{cs}\,x}{\mathrm{sn}\,x}=\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$, а $\mathrm{tg}\,(180°.\,n)=0$. Такимъ образомъ сомнительный корень здѣсь оказался пригоднымъ.

VI. $\dfrac{\mathrm{sn}^2x}{1+\mathrm{sn}^2x}=\dfrac{1}{2}\cdots$ (а). *Рѣшеніе.* Такъ какъ здѣсь C, рав-

*) Приводимъ для сравненія другой способъ. Имѣемъ послѣдовательно:
$\dfrac{\mathrm{sn}\,x}{1+\mathrm{cs}\,x}+\dfrac{\mathrm{cs}\,x}{\mathrm{sn}\,x}-2=0$; $\dfrac{(1+\mathrm{cs}\,x)\,(1-2\,\mathrm{sn}\,x)}{(1+\mathrm{cs}\,x)\,\mathrm{sn}\,x}=0$; $\dfrac{1-2\,\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}=0$.
Для послѣдняго ур-ія по § 17 находимъ: 1) $1-2\,\mathrm{sn}\,x=0$; $x=30°+360°n$, $150°+360°\,n$, что̀ удовлетворяетъ и дроби; $2\,\mathrm{sn}\,x$ не обратимо въ ∞ и потому не прибавитъ корней.

ное $1+\mathrm{sn}^2 x$, не обратимо ни въ ∞, ни въ 0*), то уравненіе, освобожденное отъ знаменателя, будетъ равносильно данному; новое уравненіе есть $2\,\mathrm{sn}^2 x = 1+\mathrm{sn}^2 x$, откуда $\mathrm{sn}^2 x = 1$, $\mathrm{sn}\,x = \pm 1$, $x = 90^\circ + 180^\circ . n$.

23. Изъ предыдущихъ примѣровъ видно, между прочимъ, что освобожденіе отъ знаменателя только тогда можетъ считаться *надежнымъ* пріемомъ, когда сопровождается дополнительнымъ изслѣдованіемъ. Но въ такомъ случаѣ выгоднѣе будетъ, не освобождаясь отъ знаменателей, приводить уравненіе къ виду $\frac{M}{N} = 0$ и примѣнять § 17.

Дѣленіе обѣихъ частей уравненія.

24. Общее замѣчаніе. Положимъ, что раздѣливъ обѣ части уравненія на C, мы получили $A = B$; тогда первоначальнымъ уравненіемъ будетъ $A.C = B.C$. Но эти два уравненія были уже сопоставлены въ § 20; только результаты сравненія тамъ были выражены примѣнительно къ замѣнѣ ур-ія $A = B$ ур-іемъ $A.C = B.C$. Теперь намъ остается выразить то же самое примѣнительно къ обратному переходу.

Итакъ, для замѣны ур-ія $A.C = B.C$...(1) ур-іемъ $A = B$...(2), будемъ имѣть:

1. Если C не обратимо ни въ 0, ни въ ∞, то ур-ія (2) и (1) равносильны.

2. Если C обратимо въ 0, то *можетъ* произойти потеря корней; ихъ надо искать въ ур-іи $C = 0$.

3. Если C обратимо въ ∞, то *могутъ* получиться посторонніе корни; они дѣлаютъ $C = \infty$ **).

Замѣчаніе. Тѣ же самые результаты получимъ, разсматривая дѣленіе на C какъ умноженіе на $\frac{1}{C}$.

---

*) Т.-е. нѣтъ *угловъ*, при которыхъ это случилось бы.

**) Въ ур-іи $A = B$ *нѣтъ* множителя, который могъ *погашать* ихъ въ ур-іи $A.C = B.C$.

Схема повѣрочныхъ подстановокъ при дѣленіи обѣихъ частей такая:

$$\begin{array}{c} A.C = B.C \\ \swarrow \quad \nwarrow \\ C=0 \quad C=\infty \\ \swarrow \\ A = B \end{array}$$

25. Примѣры. Дѣленіе обѣихъ частей уравненія какъ *практическій* пріемъ встрѣчается вообще рѣдко; поэтому ограничимся только немногими примѣрами.

I. Пусть дано уравненіе

$\mathrm{sn}^5 x + \mathrm{sn}^3 x . \mathrm{cs}^2 x + 8\,\mathrm{sn}^2 x . \mathrm{cs}^3 x + 8\,\mathrm{cs}^5 x = 0$ *)...(a).

Раздѣливъ обѣ части на *старшую* степень косинуса, получимъ

$\mathrm{tg}^5 x + \mathrm{tg}^3 x + 8\,\mathrm{tg}^2 x + 8 = 0$...(b).

Сравнимъ (a) и (b). Въ этомъ примѣрѣ C есть $\mathrm{cs}^5 x$. 1) C обращается въ 0 при $\mathrm{cs}\,x = 0$, но $\mathrm{cs}\,x = 0$ нé удовлетворяетъ ур-ію (a)**); слѣдов. потери корней нѣтъ. 2) C не обратимо въ ∞, поэтому нѣтъ и постороннихъ корней. Такимъ образомъ ур-ія (a) и (b) равносильны.

[Изъ ур-ія (b) получимъ: $\mathrm{tg}\,x = -2$, $x = -63^\circ 26' 6'' + 180^\circ . n$].

Показанный пріемъ ранѣе былъ примѣненъ въ § 11 *d* и *g*.

II. Случай потери корней былъ указанъ въ § 12 прим. 2.

Возьмемъ еще ур-іе $1 - \mathrm{cs}\,x = \mathrm{sn}\,x$...(a). Раздѣлимъ обѣ части на $\mathrm{sn}\,x$, чтобы воспользоваться формулой $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\mathrm{cs}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}$; получимъ $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1$...(b), откуда: $\frac{x}{2} = 45^\circ + 180^\circ . n$, $x = 90^\circ + 360^\circ . n$.

Сдѣлаемъ теперь повѣрку. 1) Такъ какъ $\mathrm{sn}\,x$ не обращается въ ∞, то лишнихъ корней нѣтъ. 2) Полагая $\mathrm{sn}\,x = 0$, получимъ $x = 180^\circ . n$. Подстановка въ ур-іе (a) даетъ: при n четномъ $1 - 1 = 0$, при n нечетномъ $1 - (-1) = 0$; такимъ образомъ оказался потерянный корень, именно $x = 180^\circ . 2\kappa = 360^\circ . \kappa$.

Итакъ полное рѣшеніе ур-ія (a) есть $x = 90^\circ + 360^\circ . n$; $360^\circ . n$***).

---

*) Это уравненіе имѣетъ ту особенность, что сумма показателей при $\mathrm{sn}\,x$ и $\mathrm{cs}\,x$ вездѣ одинакова.

**) Подстановка $\mathrm{cs}\,x = 0$ въ ур-іе (a) даетъ: $(\pm 1)^5 = 0$.

***) Вотъ иное рѣшеніе того же уравненія. Изъ (a) находимъ послѣдовательно: $2\,\mathrm{sn}^2\frac{x}{2} = 2\,\mathrm{sn}\frac{x}{2}\,\mathrm{cs}\frac{x}{2}$; $2\,\mathrm{sn}\frac{x}{2}\left(\mathrm{sn}\frac{x}{2} - \mathrm{cs}\frac{x}{2}\right) = 0$... (c); отсюда: $\mathrm{sn}\frac{x}{2} = 0$... (d) и $\mathrm{sn}\frac{x}{2} - \mathrm{cs}\frac{x}{2} = 0$... (e). Изъ (d) получимъ: $\frac{x}{2} = 180^\circ . n$, $x = 360^\circ . n$; изъ (e) получимъ послѣдовательно: $\mathrm{sn}\frac{x}{2} = \mathrm{cs}\frac{x}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1$ (см. примѣръ I этого §), $\frac{x}{2} = 45^\circ + 180^\circ . n$, $x = 90^\circ + 360^\circ . n$.

Найденные корни пригодны и для ур-ія (c). Итакъ

$x = 360^\circ . n$; $90^\circ + 360^\circ . n$.

III. $1+\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cs} x(1+\operatorname{ctg}^2 x)\ldots$(a). *Рѣшеніе.* Дѣля обѣ части на $1+\operatorname{ctg}^2 x$, получимъ $1=\operatorname{cs} x\ldots$(b), откуда $x=360°.n$. Изслѣдуемъ рѣшеніе. 1) Выраженіе $1+\operatorname{ctg}^2 x$ не обратимо въ 0, слѣдов. потери корней нѣтъ. 2) Подставляя $x=360°.n$ въ $1+\operatorname{ctg}^2 x$, получимъ ∞, слѣдов. корень сомнителенъ. Подстановка его въ ур-іе (a) даетъ $\infty=\infty$, что однако можетъ быть принято какъ рѣшеніе только тогда, если обнаружится, что $\infty-\infty=0$. Для раскрытія неопредѣленности приводимъ ур-іе (a) къ виду $(1-\operatorname{cs} x)(1+\operatorname{ctg}^2 x)=0$ и преобразуемъ первую часть: $(1-\operatorname{cs} x)(1+\operatorname{ctg}^2 x)=(1-\operatorname{cs} x):\operatorname{sn}^2 x = 2\operatorname{sn}^2\frac{x}{2}:4\operatorname{sn}^2\frac{x}{2}\operatorname{cs}^2\frac{x}{2}=1:2\operatorname{cs}^2\frac{x}{2}$. Подставляя $x=360°.n$ въ выраженіе $1:2\operatorname{cs}^2\frac{x}{2}$, получимъ $\frac{1}{2}$. Такимъ образомъ испытуемый корень есть посторонній.

Изъ 1) и 2) вмѣстѣ слѣдуетъ, что данное ур-іе невозможно*).

Возвышеніе обѣихъ частей уравненія въ степень.

26. Общее замѣчаніе. Приведя уравненія $A=B\ldots$(a) и $A^m=B^m\ldots$(b) къ виду
$A-B=0$ и $(A-B)(A^{m-1}+A^{m-2}.B+\ldots+A.B^{m-2}+B^{m-1})=0$,
заключаемъ, что ур-іе (b) можетъ представить — въ зависимости отъ дополнительнаго множителя — *три* случая: 1) оно можетъ быть равносильно (a), 2) можетъ имѣть лишніе корни и 3) можетъ не содержать нѣкоторыхъ корней ур-ія (a) **).

27. Разсмотримъ теперь нѣсколько примѣровъ ***возвышенія въ квадратъ***. Въ этомъ случаѣ при испытаніи *полученныхъ* корней достаточно будетъ свѣрять только *знаки* обѣихъ частей (того уравненія, которое возвышалось въ квадратъ); дѣйствительно, если уголъ удовлетворяетъ ур-ію $A^2=B^2$, то онъ удовлетворяетъ или

---

*) Изъ предыдущаго видно, что ур-іе (a) равносильно ур-ію $\frac{1}{2}\operatorname{sc}^2\frac{x}{2}=0$; въ *такой* формѣ его невозможность ясна сразу.

**) А именно: если корни ур-ія (a) даютъ для (b) неопредѣленность $0.\infty$, не разрѣшающуюся въ нуль (см. § 28). (Вообще дѣло обстоитъ одинаково съ умноженіемъ обѣихъ частей.)

ур-ію $A=B$, или ур-ію $A=-B$; такимъ образомъ неравенства абсолютныхъ величинъ не будетъ.

Что касается потери корней, то во всѣхъ примѣрахъ этого параграфа $A+B$ будетъ необратимое въ ∞, слѣдов. потери корней не встрѣтимъ.

I. Въ § 12 прим. 3 возвышеніе въ квадратъ было примѣнено къ ур-ію $3\operatorname{sn} x+4\operatorname{cs} x=5\ldots$(a); было получено $\operatorname{sn} x=\frac{3}{5}\cdots$(b) и показано, что изъ корней уравненія (b) удовлетворяютъ (a) только углы *первой* четверти *); такимъ образомъ корни уравненія (a) суть $x=36°52'11''+360°.n$.

[Остальные корни уравненія (b), т.-е. $x=143°7'49''+360°.n$, удовлетворяютъ ур-ію $3\operatorname{sn} x-4\operatorname{cs} x=5$].

II. Дано $\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{sn} x=-\operatorname{cs} x\ldots$(a), гдѣ черезъ $\sqrt{\ldots}$ означенъ *положительный* корень. *Рѣшеніе.* Возводя обѣ части въ квадратъ, получимъ $\frac{3}{2}\operatorname{sn} x=\operatorname{cs}^2 x$, откуда найдемъ**): $\operatorname{sn} x=\frac{1}{2}$, $x=30°+360°.n$; $150°+360°.n$. Испытаемъ полученные корни, подставляя ихъ въ (a): первая часть *по условію* положительна; для второй части будемъ имѣть: 1) $-\operatorname{cs}(30°+360°.n)=-\operatorname{cs}30°$, слѣдов. $x=30°+360°.n$ непригодно для ур-ія (a); 2) $-\operatorname{cs}(150°+360°.n)=-\operatorname{cs}150°=\operatorname{cs}30°$, слѣдов. ур-іе (a) удовлетворится.

Итакъ, въ ур-іи (a) $x=150°+360°.n$.

III. Дано $\operatorname{sn}3x=\sqrt{\operatorname{sn}^2\frac{3x}{4}}\cdots$(a), гдѣ черезъ $\sqrt{\ldots}$ означенъ *положительный* корень***). *Рѣшеніе.* Возводя обѣ части въ квадратъ, получимъ $\operatorname{sn}^2 3x=\operatorname{sn}^2\frac{3x}{4}$, откуда $\operatorname{sn}^2 3x-\operatorname{sn}^2\frac{3x}{4}=0$ или

---

*) Для разбора корней мы пользовались ур-іемъ (a); но вмѣсто этого можно было бы свѣрять знаки обѣихъ частей того уравненія, которое возвышалось въ квадратъ, т.-е. ур-ія $4\operatorname{cs} x=5-3\operatorname{sn} x$.

**) См. § 11 *a*.

***) При такомъ условіи было бы неправильно $\sqrt{\operatorname{sn}^2\frac{3x}{4}}$ замѣнить черезъ $\operatorname{sn}\frac{3x}{4}$.

$\mathrm{sn}\frac{15x}{4}\cdot\mathrm{sn}\frac{9x}{4}=0$*). Изъ послѣдняго ур-ія найдемъ: 1) $\mathrm{sn}\frac{15x}{4}=0$;
$\frac{15x}{4}=180°.n$, $x=48°.n$; 2) $\mathrm{sn}\frac{9x}{4}=0$; $\frac{9x}{4}=180°.n$, $x=80°.n$.

Для испытанія полученныхъ корней достаточно опредѣлить знакъ $\mathrm{sn}\,3x$, т.-е. знакъ $\mathrm{sn}\,(144°.n)$ и $\mathrm{sn}\,(240°.n)$.

Для $\mathrm{sn}\,(144°.n)$ поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Періодъ синуса есть 360°, разность прогрессіи $144°.n$ есть 144°; наименьшее кратное 360° и 144° есть 720°; теперь разложимъ $3x=144°.n$ такъ: $3x=0+720°.m$, $144°+720°.m$, $288°+720°.m$, $432°+720°.m$, $576°+720°.m$; при подстановкѣ этихъ угловъ въ $\mathrm{sn}\,3x$ можно $720°.m$ опускать. Сдѣлавъ испытаніе, найдемъ, что для ур-ія (а) пригодны только первый, второй и четвертый рядъ угловъ. Такимъ образомъ $x=48°.n$ даетъ для уравненія (а) $x=240°.m$, $48°+240°.m$, $144°+240°.m$.

Поступая такъ же, найдемъ, что изъ $x=80°.n$ пригодно для ур-ія (а) $x=240°.m$, $160°+240°.m$.

Итакъ, корни ур-ія (а) выражаются слѣдующими формулами:

$$x=240°.m,\ 48°+240°.m,\ 144°+240°.m,\ 160°+240°.m.$$

IV. $\mathrm{sn}\,x+\mathrm{cs}\,x=\mathrm{sn}\,x.\mathrm{cs}\,x\ldots$(а). *Рѣшеніе.* Возводя обѣ части въ квадратъ, получимъ $\mathrm{sn}^2x+2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cs}\,x+\mathrm{cs}^2x=\mathrm{sn}^2x.\mathrm{cs}^2x$ или $1+\mathrm{sn}\,2x=\frac{1}{4}\mathrm{sn}^2\,2x$; отсюда: $\mathrm{sn}^2\,2x-4\,\mathrm{sn}\,2x-4=0$;
$\mathrm{sn}\,2x=2-\sqrt{8}=-2(\sqrt{2}-1)=-2\,\mathrm{tg}\,22°\,30'$;

$$2x=-55°\,56'\,13''+360°.n,\quad -124°\,3'\,47''+360°.n;$$
$$x=-27°\,58'\,7''+180°.n,\quad -62°\,1'\,54''+180°.n.$$

Сдѣлаемъ разборъ корней.

Замѣтимъ, что *вторая* часть уравненія (а) при *всѣхъ* подстановкахъ будетъ *отрицательна*, потому что ее можно замѣнить черезъ $\frac{1}{2}\mathrm{sn}\,2x$, а для $\mathrm{sn}\,2x$ получено отрицательное значеніе.

Для подстановки въ первую часть распредѣлимъ полученные углы такъ: $x=-27°\,58'\,7''+360°.n$, $152°\,1'\,53''+360°.n$;

*) По формулѣ: $\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2\beta=\mathrm{sn}\,(\alpha+\beta).\mathrm{sn}\,(\alpha-\beta)$.

$-62°\,1'\,54''+360°.n$, $117°\,58'\,6''+360°.n$. Подставляя, можно будетъ $360°.n$ опускать. Первая подстановка даетъ $\mathrm{sn}(-27°58'7'')+\mathrm{cs}(-27°58'7'')$ или: $-\mathrm{sn}\,27°58'7''+\mathrm{cs}\,27°58'7''$; это выраженіе имѣетъ положительное значеніе*), слѣдовательно испытуемый рядъ угловъ *не* пригоденъ для уравненія (а). При второй подстановкѣ получимъ

$$\mathrm{sn}\,152°\,1'\,53''+\mathrm{cs}\,152°\,1'\,53''\text{ или }\mathrm{cs}\,62°\,1'\,53''-\mathrm{sn}\,62°\,1'\,53'';$$

это выраженіе имѣетъ отрицательное значеніе*), и потому уравненіе (а) удовлетворится. Разсуждая совершенно такъ же, найдемъ, что $x=-62°\,1'\,54''+360°.n$ пригодно для уравненія (а), а $x=117°\,58'\,6''+360°.n$ непригодно.

Итакъ, корни уравненія (а) суть $x=152°\,1'\,53''+360°.n$, $-62°\,1'\,54''+360°.n$**). √

28. Въ § 26 было указано, что при возвышеніи уравненія въ степень возможна еще потеря корней, а также и сохраненіе равносильности. Приводимъ теперь примѣры того и другого.

I. Начнемъ съ алгебраическаго случая. 1) Пусть дано $\frac{1+x^2}{1-x}=\frac{2x}{1-x}\cdots$(а). Получимъ: $\frac{1+x^2}{1-x}-\frac{2x}{1-x}=0$, или $\frac{(1-x)^2}{1-x}=0$, или $1-x=0$, откуда $x=1$.

2) Возвышая ур-іе (а) въ квадратъ, будемъ имѣть $\frac{1+2x^2+x^4}{(1-x)^2}=\frac{4x^2}{(1-x)^2}\cdots$(b). Подставляя сюда $x=1$, получимъ $\frac{4}{0}=\frac{4}{0}$, что требуетъ изслѣдованія. Разность обѣихъ частей ур-ія (b) есть $\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1-x)^2}$, или $\frac{(1-x^2)^2}{(1-x)^2}$, или $(1+x)^2$; а это при $x=1$ обращается въ 4. Такимъ образомъ $x=1$ *не* удовлетворяетъ уравненію (b)***).

II. 1) Рѣшая уравненіе $\mathrm{sc}\,x=\mathrm{tg}\,x$, будетъ имѣть:
$\mathrm{sc}\,x-\mathrm{tg}\,x=0$; $\frac{1-\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{cs}\,x}=0$; $\frac{1-\mathrm{cs}\,(90°-x)}{\mathrm{sn}\,(90°-x)}=0$; $\mathrm{tg}\left(45°-\frac{x}{2}\right)=0$;
отсюда: $45°-\frac{x}{2}=180°.n$, $x=90°-360°.n$.

*) Если $0<\alpha<45°$, то $\mathrm{sn}\,\alpha<\mathrm{cs}\,\alpha$; если же $45°<\alpha<90°$, то $\mathrm{sn}\,\alpha>\mathrm{cs}\,\alpha$.

**) Иное рѣшеніе ур-ія (а) см. въ § 32 VII.

***) Корень уравненія (b) есть $x=-1$, что, въ свою очередь, не удовлетворяетъ уравненію (а).

2) Возводя ур-іе (a) въ квадратъ, получимъ $\mathrm{sc}^2 x = \mathrm{tg}^2 x$... (b); но это уравненіе невозможное, такъ какъ разность $\mathrm{sc}^2 x - \mathrm{tg}^2 x$ *всегда* равна 1.

3) Точно такъ же, легко убѣдиться, что корни ур-ія $\mathrm{sc}\,x = \mathrm{tg}\,x$ не удовлетворяютъ и ур-ію $\mathrm{sc}^3 x = \mathrm{tg}^3 x$; а именно, подставляя сюда $x = 90° - 360°.\,n$, найдемъ*), что при этомъ истинное значеніе разности $\mathrm{sc}^3 x - \mathrm{tg}^3 x$ есть ∞**).

III. Сравнимъ уравненія: $\mathrm{sn}\,x = \mathrm{cs}\,x$... (a) и $\mathrm{sn}^3 x = \mathrm{cs}^3 x$... (b). — Изъ ур-ія (b) находимъ послѣдовательно: $\mathrm{sn}^3 - \mathrm{cs}^3 x = 0$; $(\mathrm{sn}\,x - \mathrm{cs}\,x)(\mathrm{sn}^2 x + \mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,x + \mathrm{cs}^2 x) = 0$; $(\mathrm{sn}\,x - \mathrm{cs}\,x)(1 + \mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,x) = 0$. Такъ какъ выраженіе $1 + \mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,x$ не обратимо ни въ 0***), ни въ ∞, то ур-іе (b) *равносильно* (a).

Освобожденіе обѣихъ частей уравненія отъ знака тригонометрической функціи.

29. Общее замѣчаніе. Разсмотримъ уравненія: $\mathrm{sn}\,(3x + 10°) = \mathrm{sn}\,(x + 50°)$... (a) и $3x + 10° = x + 50°$... (b). Эти уравненія *не* равносильны: дѣйствительно, корень ур-ія (b) удовлетворяетъ (a), такъ какъ равнымъ аргументамъ соотвѣтствуютъ равные же синусы; но ур-іе (a) имѣетъ еще корни не удовлетворяющіе (b), такъ какъ синусы могутъ быть равны и при неравныхъ аргументахъ.

Подобное же происходитъ и въ другихъ случаяхъ того же рода.

Какъ *надо* поступать въ этихъ случаяхъ, будетъ показано въ слѣдующемъ параграфѣ.

30. Примѣры. I. $\mathrm{sn}\,(3x + 10°) = \mathrm{sn}\,(x + 50°)$...(a). *Рѣшеніе.* Находимъ: $\mathrm{sn}(3x + 10°) - \mathrm{sn}(x + 50°) = 0$; $2\mathrm{sn}(x - 20°).\mathrm{cs}(2x + 30°) = 0$.

*) Переходя на $\mathrm{sn}\,x$ и $\mathrm{cs}\,x$.

**) Ур-іе $\mathrm{sc}^3 x = \mathrm{tg}^3 x$ есть также невозможное.

***) Полагая $1 + \mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,x = 0$, будемъ имѣть $2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cs}\,x = -2$ или $\mathrm{sn}\,2x = -2$, что невозможно.

[Не лишено интереса слѣдующее соотвѣтствіе. Ур-іе $\mathrm{sn}^2 x + \mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,x + \mathrm{cs}^2 x = 0$ приводитъ, какъ мы только что видѣли, къ требованію $\mathrm{sn}\,2x = -2$. Примѣнимъ къ тому же ур-ію еще пріемъ, указанный въ § 25 I; получимъ

$$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\,x + 1 = 0, \text{ откуда } \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})\Big].$$

Отсюда: 1) $\mathrm{sn}\,(x - 20°) = 0$; $x - 20° = 180°.\,n$, $x = 20° + 180°.\,n$; 2) $\mathrm{cs}\,(2x + 30°) = 0$; $2x + 30° = 90° + 180°.\,n$, $x = 30° + 90°.\,n$. Итакъ $x = 20° + 180°.\,n$, $30° + 90°.\,n$.

[Опустивъ въ обѣихъ частяхъ ур-ія (a) знакъ sn, мы получили бы только $x = 20°$].

II. $\mathrm{sn}^2 x = \mathrm{sn}^2 \alpha$. *Рѣшеніе.* Имѣемъ: $\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 \alpha = 0$ или $\mathrm{sn}\,(x + \alpha)\,.\,\mathrm{sn}\,(x - \alpha) = 0$*). Отсюда: 1) $x + \alpha = 180°.\,n$, $x = -\alpha + 180°.\,n$; 2) $x - \alpha = 180°.\,n$, $x = \alpha + 180°.\,n$. Итакъ $x = \pm\alpha + 180°.\,n$.

III. Дано $\mathrm{sn}\,\alpha = \mathrm{cs}\,\beta$; требуется найти зависимость между α и β. *Рѣшеніе.* Имѣемъ: $\mathrm{sn}\,\alpha - \mathrm{cs}\,\beta = 0$; $\mathrm{sn}\,\alpha - \mathrm{sn}\,(90° - \beta) = 0$;

$$2\,\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45°\right).\mathrm{cs}\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 45°\right) = 0. \text{ Отсюда:}$$

1) $\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45°\right) = 0$; $\frac{\alpha+\beta}{2} - 45° = 180°.\,n$, $\alpha + \beta = 90° + 360°.\,n$.

2) $\mathrm{cs}\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 45°\right) = 0$; $\frac{\alpha-\beta}{2} + 45° = 90° + 180°.\,n$, $\alpha - \beta = 90° + 360°.\,n$.

Итакъ, искомая зависимость есть: $\alpha \pm \beta = 90° + 360°.\,n$.

IV. $\mathrm{tg}\,4x = \mathrm{tg}\,x$. *Рѣшеніе.* Имѣемъ $\mathrm{tg}\,4x - \mathrm{tg}\,x = 0$ или $\frac{\mathrm{sn}\,3x}{\mathrm{cs}\,4x\,.\,\mathrm{cs}\,x} = 0$. Такъ какъ знаменатель этой дроби не обращается въ ∞, то пользуемся только числителемъ. Полагая $\mathrm{sn}\,3x = 0$, получимъ: $3x = 180°.\,n$, $x = 60°.\,n$; этотъ корень не обращаетъ знаменателя въ нуль**), поэтому пригоденъ и для дроби. Итакъ $x = 60°.\,n$.

V. $\mathrm{sc}\,3x = \mathrm{sc}\,x$. *Рѣшеніе.* Находимъ: $\mathrm{sc}\,3x - \mathrm{sc}\,x = 0$;

$$\frac{1}{\mathrm{cs}\,3x} - \frac{1}{\mathrm{cs}\,x} = 0;\quad \frac{\mathrm{cs}\,x - \mathrm{cs}\,3x}{\mathrm{cs}\,3x\,.\,\mathrm{cs}\,x} = 0;\quad \frac{2\,\mathrm{sn}\,2x\,.\,\mathrm{sn}\,x}{\mathrm{cs}\,3x\,.\,\mathrm{cs}\,x} = 0;\quad \frac{4\,\mathrm{sn}^2 x}{\mathrm{cs}\,3x} = 0.$$

Такъ какъ $\mathrm{cs}\,3x$ не обратимо въ ∞, то полагаемъ только $\mathrm{sn}^2 x = 0$; отсюда получимъ $x = 180°.\,n$, что пригодно и для дроби, потому что $\mathrm{cs}\,3x = \mathrm{cs}\,(180°.\,3n)$ не равно нулю. Итакъ $x = 180°.\,n$.

*) См. вып. перв. § 79 b).

**) При помощи чертежа легко убѣдиться, что ни одна изъ дугъ $4x = 240°.\,n$ и $x = 60°.\,n$ не оканчивается на вертикальномъ діаметрѣ.

Общій выводъ и примѣры къ нему.

31. Общій выводъ. Возвратимся къ вопросу, поставленному въ § 10. Сводя все изложенное выше, мы можемъ теперь сказать, что для рѣшенія тригонометрическихъ уравненій нѣтъ такого способа, который *всегда* былъ бы и кратокъ и надеженъ. *Выгоднѣе* все-таки держаться двухъ слѣдующихъ правилъ:

1) *Въ уравненіи нѣтъ знаменателя съ функціей неизвѣстнаго.* — Упрощаемъ отдѣльные члены*); приводимъ уравненіе къ нулю; приводимъ первую часть къ одной функціи (большею частію къ sn и cs) и къ одному аргументу**) или, не дѣлая этого, составляемъ произведеніе и поступаемъ какъ показано въ §§ 14—16***).

2) *Въ уравненіи есть знаменатели, содержащіе функцію неизвѣстнаго.* — Упрощаемъ отдѣльные члены****); приводимъ ур-іе къ нулю; соединяемъ первую часть въ одну дробь; *сокращаемъ* ее*****); далѣе поступаемъ какъ показано въ §§ 17—19.

(Для справокъ, въ концѣ книги приложенъ списокъ всѣхъ уравненій, рѣшенныхъ въ этой статьѣ, съ указаніемъ §§, гдѣ о нихъ говорится.)

32. Примѣры. Цѣль этихъ примѣровъ — пояснить правила, данныя въ § 31, а также обратить вниманіе на нѣкоторые частные случаи и пріемы рѣшенія.

I. $\operatorname{sn}(x+\alpha)+\operatorname{cs}(x-\alpha)=m$. *Рѣшеніе.* Имѣемъ: $\operatorname{sn}(x+\alpha)+\operatorname{sn}(90°-x+\alpha)=m$; $2\operatorname{sn}(45°+\alpha).\operatorname{cs}(x-45°)=m$. Отсюда $\operatorname{cs}(x-45°)=m:2\operatorname{sn}(45°+\alpha)$.

II. $a(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)=b(1-\operatorname{sn}2x):\operatorname{sn}2x$. *Рѣшеніе.* Зная, что

*) Напримѣръ: вмѣсто $\operatorname{cs}x.\operatorname{tg}x$ пишемъ $\operatorname{sn}x$, вмѣсто $(1-\operatorname{cs}x)\csc x$ пишемъ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, и т. п.

**) Примѣры см. въ § 11.

***) Напр. ур-іе $\operatorname{sn}3x-\operatorname{sn}x=\operatorname{cs}2x$ замѣняемъ такъ: $2\operatorname{sn}x.\operatorname{cs}2x=\operatorname{cs}2x$; $\operatorname{cs}2x(2\operatorname{sn}x-1)=0$.

****) Напр. въ ур-іи $\frac{\operatorname{sn}2x}{\operatorname{sn}x}=\frac{\operatorname{cs}x}{\operatorname{cs}2x}$ вмѣсто $\frac{\operatorname{sn}2x}{\operatorname{sn}x}$ пишемъ $2\operatorname{cs}x$, и т. п.

*****) Насколько это возможно и видно съ перваго взгляда.

$\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$ и $\operatorname{sn}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$*), будемъ имѣть $a.\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{tg}x}=b.\frac{(1-\operatorname{tg}x)^2}{2\operatorname{tg}x}$ или $\frac{(1-\operatorname{tg}x)[2a(1+\operatorname{tg}x)-b(1-\operatorname{tg}x)]}{2\operatorname{tg}x}=0$. Такъ какъ дробь несократима и степень знаменателя *ниже* степени числителя, то получимъ *полное* рѣшеніе, приравнивая числителя нулю; новое уравненіе распадается на слѣдующія два: 1) $1-\operatorname{tg}x=0$ и 2) $2a(1+\operatorname{tg}x)-b(1-\operatorname{tg}x)=0$; изъ перваго ур-ія получимъ $\operatorname{tg}x=1$, а изъ второго: $\operatorname{tg}x=\frac{b-2a}{b+2a}$.

III. $\csc x=\csc\frac{x}{2}$. *Рѣшеніе.* Находимъ послѣдовательно:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}x}=\frac{1}{\operatorname{sn}\frac{x}{2}};\quad \frac{1}{2\operatorname{sn}\frac{x}{2}\operatorname{cs}\frac{x}{2}}=\frac{1}{\operatorname{sn}\frac{x}{2}};\quad \frac{1-2\operatorname{cs}\frac{x}{2}}{\operatorname{sn}x}=0.$$

Такъ какъ $\operatorname{sn}x$ не обратимо въ ∞, то полагаемъ только $1-2\operatorname{cs}\frac{x}{2}=0$; отсюда: $\operatorname{cs}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2}=\pm60°+360°.n$, $x=\pm120°+720°.n$. Эти корни пригодны и для дроби, такъ какъ не обращаютъ знаменателя въ нуль.

IV. $\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}4x=2\operatorname{ctg}2x$. *Рѣшеніе.* Имѣемъ:

$$(\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x)-(\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}4x)=0;$$

$$\frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{sn}x.\operatorname{sn}2x}-\frac{\operatorname{sn}2x}{\operatorname{sn}2x.\operatorname{sn}4x}=0;$$ **)

$$\frac{1}{\operatorname{sn}2x}-\frac{1}{\operatorname{sn}4x}=0;\quad \frac{2\operatorname{cs}2x-1}{\operatorname{sn}4x}=0.$$ ***)

Такъ какъ $\operatorname{sn}4x$ не обратимо въ ∞, то полагаемъ только $2\operatorname{cs}2x-1=0$, откуда: $\operatorname{cs}2x=\frac{1}{2}$; $2x=\pm60°+360°.n$, $x=\pm30°+180°.n$; эти корни удовлетворяютъ и дроби, потому что при нихъ $\operatorname{sn}4x$ не равно нулю****).

Итакъ, окончательно, $x=\pm30°+180°.n$.

*) $\operatorname{sn}2x=\frac{2\operatorname{sn}x.\operatorname{cs}x}{\operatorname{sn}^2x+\operatorname{cs}^2x}$; далѣе дѣлимъ числителя и знаменателя на cs^2x. (См. также въ первомъ выпускѣ дополн. къ § 71).

**) По формулѣ $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{sn}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sn}\alpha.\operatorname{sn}\beta}$.

***) $\operatorname{sn}4x=2.\operatorname{sn}2x.\operatorname{cs}2x$.

****) $\operatorname{sn}(\pm120°+720°.n)=\pm\operatorname{sn}120°$.

V. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=4$. *Рѣшеніе.* Полагая на время $\frac{\pi}{4}-x=y$, будемъ имѣть $\mathrm{tg}\,y+\mathrm{ctg}\,y=4$ или: $\frac{\mathrm{sn}\,y}{\mathrm{cs}\,y}+\frac{\mathrm{cs}\,y}{\mathrm{sn}\,y}=4$, $\frac{\mathrm{sn}^2y+\mathrm{cs}^2y}{\mathrm{cs}\,y\,.\,\mathrm{sn}\,y}=4$; отсюда $\frac{1}{\mathrm{sn}\,2y}=2$; но $\mathrm{sn}\,2y=\mathrm{sn}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\mathrm{cs}\,2x$; такимъ образомъ $\frac{1}{\mathrm{cs}\,2x}=2$. Отсюда: $\mathrm{cs}\,2x=\frac{1}{2}$; $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi.n$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi.n$.

VI. Къ рѣшенію уравненій вида $a\,\mathrm{sn}\,x+b\,\mathrm{cs}\,x=c$ кромѣ способовъ, указанныхъ въ §§ 11 и 12, можно еще примѣнить *вспомогательный уголъ*. Это дѣлается такъ.

Раздѣливъ обѣ части уравненія на b, получимъ $\frac{a}{b}\cdot\mathrm{sn}\,x+\mathrm{cs}\,x=\frac{c}{b}$; полагаемъ здѣсь $\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\varphi$; тогда будемъ имѣть $\mathrm{tg}\,\varphi\,.\,\mathrm{sn}\,x+\mathrm{cs}\,x=\frac{c}{b}$; умножая теперь обѣ части на $\mathrm{cs}\,\varphi$*), получимъ

$$\mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{sn}\,\varphi+\mathrm{cs}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,\varphi=\frac{c}{b}\cdot\mathrm{cs}\,\varphi \quad \text{или} \quad \mathrm{cs}\,(x-\varphi)=\frac{c}{b}\cdot\mathrm{cs}\,\varphi.$$

Примѣнимъ этотъ пріемъ къ уравненію $3\,\mathrm{sn}\,x+4\,\mathrm{cs}\,x=5$ (ср. § 11 *e* и § 27 I). Получимъ: 1) $\mathrm{tg}\,\varphi=0{,}75$; $\varphi=36^\circ\,52'\,12''$; 2) $\mathrm{cs}\,(x-\varphi)=1{,}25\,.\,\mathrm{cs}\,\varphi$; $\lg\mathrm{cs}\,(x-\varphi)=0{,}09691+(9{,}90309-10)=0$; $\mathrm{cs}\,(x-\varphi)=1$; $x-\varphi=360^\circ.n$; $x=\varphi+360^\circ.n=36^\circ\,52'\,12''+360^\circ.n$.

VII. $\mathrm{sn}\,x+\mathrm{cs}\,x=\mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,x$**). *Рѣшеніе.* Такъ какъ $\mathrm{sn}\,x+\mathrm{cs}\,x=\sqrt{2}\,.\,\mathrm{cs}\,(x-45^\circ)$***) и $\mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,x=\frac{1}{2}\mathrm{sn}\,2x$, то данное ур-іе можно замѣнить такимъ: $\sqrt{2}\,.\,\mathrm{cs}\,(x-45^\circ)=\frac{1}{2}\mathrm{sn}\,2x$; но $\mathrm{sn}\,2x=\mathrm{cs}(90^\circ-2x)=\mathrm{cs}\,(2x-90^\circ)$; пользуясь этимъ, получимъ $\sqrt{2}\,.\,\mathrm{cs}\,(x-45^\circ)$

---

*) Такъ какъ $\mathrm{cs}\,\varphi$ не есть ни 0, ни ∞, то равносильность сохранится.

**) Это уравненіе уже было рѣшено въ § 27 — возвышеніемъ обѣихъ частей въ квадратъ. Теперь мы предлагаемъ способъ, *не* требующій разбора корней.

***) $\mathrm{sn}\,x+\mathrm{cs}\,x=\sqrt{2}\left(\mathrm{cs}\,x\,.\,\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{sn}\,x\,.\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\mathrm{cs}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,45^\circ+\mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{sn}\,45^\circ\right)$.

$=\frac{1}{2}\mathrm{cs}\,(2x-90^\circ)$. Полагая теперь $x-45^\circ=y$, будемъ имѣть $\sqrt{2}\,.\,\mathrm{cs}\,y=\frac{1}{2}\mathrm{cs}\,2y$; отсюда найдемъ послѣдовательно:

$\sqrt{2}\,.\,\mathrm{cs}\,y=\mathrm{cs}^2y-\frac{1}{2}$; $\mathrm{cs}^2y-\sqrt{2}\,.\,\mathrm{cs}\,y-\frac{1}{2}=0$; $\mathrm{cs}\,y=\frac{\sqrt{2}}{2}-1=-(1-\mathrm{cs}\,45^\circ)=-2\,.\,\mathrm{sn}^2\,22^\circ\,30'$; $y=\pm107^\circ\,1'\,53''+360^\circ.n$.

Такимъ образомъ $x-45^\circ=\pm107^\circ\,1'\,53''+360^\circ.n$, откуда $x=152^\circ\,1'\,53''+360^\circ.n$, $-62^\circ\,1'\,53''+360^\circ.n$.

33. Въ примѣрахъ VIII, IX и X уравненія будутъ рѣшены не въ полномъ объемѣ, а съ *ограниченіями*, налагаемыми *задачей*.

VIII. *Задача.* Опредѣлить уголъ при основаніи такого равнобедреннаго треугольника, въ которомъ центры круговъ вписаннаго и описаннаго симметричны относительно основанія*).

Рѣшеніе. Означимъ черезъ x *половину* искомаго угла и черезъ a, h, r и R соотвѣтственно: *половину* основанія тр-ка, его высоту и радіусы круговъ.

Центръ вписаннаго круга отстоитъ отъ основанія на $r=a\,.\,\mathrm{tg}\,x$; центръ описаннаго круга (лежащій *внѣ* тр-ка) удаленъ отъ основанія на $R-h=\frac{a}{\mathrm{sn}\,4x}-a\,.\,\mathrm{tg}\,2x$. Согласно условію задачи будемъ имѣть: $a\,.\,\mathrm{tg}\,x=\frac{a}{\mathrm{sn}\,4x}-a\,.\,\mathrm{tg}\,2x$ или $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\mathrm{sn}\,4x}-\mathrm{tg}\,2x$.

Рѣшая это уравненіе***), получимъ: $\mathrm{tg}\,2x+\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\mathrm{sn}\,4x}$; $\frac{\mathrm{sn}\,3x^{**)}}{\mathrm{cs}\,2x\,.\,\mathrm{cs}\,x}-\frac{1}{\mathrm{sn}\,4x}=0$; $\frac{4\,\mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{sn}\,3x-1}{\mathrm{sn}\,4x}=0$; $\frac{12\,\mathrm{sn}^2x-16\,\mathrm{sn}^4x-1}{\mathrm{sn}\,4x}=0$. Такъ какъ знаменатель не обратимый въ ∞, то полагаемъ только

$$12\,\mathrm{sn}^2x-16\,\mathrm{sn}^4x-1=0, \quad \text{откуда:} \quad \mathrm{sn}^4x-\frac{3}{4}\mathrm{sn}^2x+\frac{1}{16}=0;$$

$$\mathrm{sn}^2x=\frac{3}{8}\pm\frac{\sqrt{5}}{8}.^{****)}$$

---

*) Т.-е. ихъ соединительная линія перпендикулярна къ основанію и дѣлится имъ пополамъ.

**) По формулѣ $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\mathrm{sn}\,(\alpha+\beta)}{\mathrm{cs}\,\alpha\,.\,\mathrm{cs}\,\beta}$.

***) $\mathrm{sn}\,4x=2\,.\,\mathrm{sn}\,2x\,.\,\mathrm{cs}\,2x=2\,.\,2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cs}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,2x$.

****) Эти числа пригодны и для дроби, такъ какъ не обращаютъ знаменателя въ нуль; дѣйствительно, для $\mathrm{sn}\,4x=0$ требуется $x=45^\circ.n$, а $\mathrm{sn}^2\,(45^\circ.n)=0,\ \frac{1}{2},\ 1$.

Рѣшая уравненіе *независимо* отъ задачи, мы должны были бы принять *оба* значенія для $\operatorname{sn}^2 x$, такъ какъ они оба положительны и менѣе единицы; соотвѣтственно этому мы получили бы *четыре* значенія для $\operatorname{sn} x$. Но въ нашей задачѣ x есть уголъ положительный и меньшій 45°; а это требуетъ, чтобы $\operatorname{sn} x$ былъ положителенъ и чтобы $\operatorname{sn}^2 x$ было менѣе $\frac{1}{2}$. Поэтому мы беремъ только $\operatorname{sn}^2 x = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}$ и рѣшеніе оканчиваемъ такъ: $\operatorname{sn} x = \sqrt{\frac{1}{8}(3-\sqrt{5})} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; $x = 18°$.

Черезъ x мы означили *половину* искомаго угла, слѣдовательно цѣлый уголъ равенъ 36°*).

Замѣчаніе. Полное рѣшеніе ур-ія $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{sn} 4x} - \operatorname{tg} 2x$ есть: $\operatorname{sn} x = \pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1), \pm\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; $x = \pm 54° + 360°.n, \pm 126° + 360°.n; \pm 18° + 360°.n, \pm 162° + 360°.n$.

IX. *Задача.* Опредѣлить углы треугольника, если дано:

$$m_a : a = 3 : 2^{**}) \quad \text{и} \quad B = 2C.$$

Рѣшеніе. Означимъ уголъ C черезъ x; тогда $B = 2x$ и $A = 180° - (B + C) = 180° - 3x$. Замѣнимъ m_a и a выраженіями, содержащими углы. Для m_a имѣемъ изъ геометріи: $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$; далѣе: $b = 2R.\operatorname{sn} 2x$, $c = 2R.\operatorname{sn} x$ и $a = 2R.\operatorname{sn}(180° - 3x) = 2R.\operatorname{sn} 3x$. Подставляя получимъ $m_a = R\sqrt{2\operatorname{sn}^2 2x + 2\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 3x}$, гдѣ $\sqrt{..}$ означаетъ *положительный* корень. Пользуясь найденными выраженіями для m_a и a и условіемъ $m_a : a = 3 : 2$, получимъ уравненіе:

$$\sqrt{2\operatorname{sn}^2 2x + 2\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 3x} : \operatorname{sn} 3x = 3 \ldots (a).$$

Возводимъ теперь обѣ части въ квадратъ:

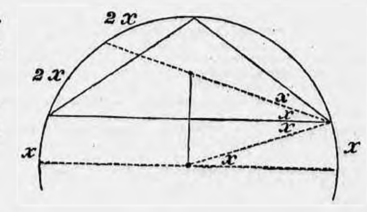
$$(2\operatorname{sn}^2 2x + 2\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 3x) : \operatorname{sn}^2 3x = 9 \ldots (b).$$

Прибавляемъ къ обѣимъ частямъ по единицѣ:

$$(2\operatorname{sn}^2 2x + 2\operatorname{sn}^2 x) : \operatorname{sn}^2 3x = 10.$$

*) Для сравненія, приводимъ *геометрическое* рѣшеніе той же задачи: оно ясно изъ прилагаемаго чертежа.

**) Черезъ m_a означена *медіана* стороны a, т.-е. линія, соединяющая средину a съ противоположной вершиной.



Дѣля обѣ части на 2, замѣняя $\operatorname{sn} 3x$ черезъ $\operatorname{sn} x(3 - 4\operatorname{sn}^2 x)$ и сокращая затѣмъ первую часть на $\operatorname{sn}^2 x$, получимъ:

$$\frac{4\operatorname{cs}^2 x + 1}{(3 - 4\operatorname{sn}^2 x)^2} = 5 \quad \text{или} \quad \frac{4\operatorname{cs}^2 x + 1}{(4\operatorname{cs}^2 x - 1)^2} = 5.$$

Приведя уравненіе къ нулю и раздѣливъ на 4, будемъ имѣть

$$\frac{20\operatorname{cs}^4 x - 11\operatorname{cs}^2 x + 1}{(4\operatorname{cs}^2 x - 1)^2} = 0 \ldots (c).$$

Для обращенія этой дроби въ 0 пользуемся только числителемъ, такъ какъ знаменатель не обратимый въ ∞. Получимъ:

$$20\operatorname{cs}^4 x - 11\operatorname{cs}^2 x + 1 = 0 \ldots (d); \quad \operatorname{cs}^2 x = \frac{1}{40}(11 \pm \sqrt{41}).$$

Эти корни пригодны и для дроби, потому что не обращаютъ знаменателя въ нуль*). Значенія, полученныя для $\operatorname{cs}^2 x$, *оба* возможны.

Опредѣляя теперь $\operatorname{cs} x$ и затѣмъ x, примемъ во вниманіе, что по смыслу *задачи* уголъ x долженъ быть положительный острый; соотвѣтственно этому найдемъ:

$$\operatorname{cs} x_1 = \sqrt{0{,}435078}; \quad x_1 = 48° 43' 47''$$
$$\operatorname{cs} x_2 = \sqrt{0{,}114922}; \quad x_2 = 70° 11' 2''.$$

Но полученные углы еще требуютъ испытанія, потому что ур-іе (a) было возвышено въ квадратъ, и слѣдов. могли войти *посторонніе* корни: и дѣйствительно, уголъ x_2 *не* удовлетворяетъ уравненію (a), такъ какъ $\operatorname{sn} 3x_2$ отрицателенъ.

Итакъ: $C = 48° 43' 47''$; $B = 97° 27' 34''$; $A = 33° 48' 39''$.

[Уголъ x_2 далъ бы для A *отрицательное* значеніе, что инымъ путемъ обнаружило бы его непригодность для задачи; но онъ непригоденъ не только для задачи, но и для начальнаго уравненія.]

Замѣчаніе. Полное рѣшеніе ур-ія (a), съ разборомъ корней, есть:

$$\operatorname{cs} x = \pm\frac{1}{40}(11 + \sqrt{41}), \ \pm\frac{1}{40}(11 - \sqrt{41});$$

$$x = 48°43'47'' + 360°.n, \ 131°16'13'' + 360°.n, \ -70°11'2'' + 360°.n, \ -109°48'58'' + 360°.n.$$

X. *Задача.* Опредѣлить углы треугольника подъ условіемъ, что ихъ тангенсы суть послѣдовательныя цѣлыя числа.

*) Къ рѣшенію ур-ія (c) можно примѣнить также *алгебраическое замѣчаніе* въ § 17.

Рѣшеніе. Полагаемъ: $\operatorname{tg} A = n - 1$, $\operatorname{tg} B = n$, $\operatorname{tg} C = n + 1$. Такъ какъ $B = 180° - (A + C)$, то

$$\operatorname{tg} B = -\operatorname{tg}(A + C) = -\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} C}.$$

Подставляя сюда предыдущія выраженія, получимъ

$$n = -\frac{2n}{1 - (n^2 - 1)} \quad \text{или} \quad \frac{n(4 - n^2)}{2 - n^2} = 0.$$

Послѣднее уравненіе даетъ $n = 0, +2, -2$; соотвѣтственно чему получимъ такія три комбинаціи чиселъ:

$n - 1$	-1	1	-3
n	0	2	-2
$n + 1$	1	3	-1

Числа каждой комбинаціи суть цѣлыя, послѣдовательныя и могутъ быть значеніями тангенсовъ вообще; но для *треугольника* 1-я и 3-я комбинаціи непригодны: 1-я потому, что содержитъ 0, а 3-я потому, что отрицательныхъ чиселъ *три* *); слѣдовательно остается: $\operatorname{tg} A = 1$, $\operatorname{tg} B = 2$, $\operatorname{tg} C = 3$. Изъ угловъ, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ, для *задачи* надо будетъ взять только *положительные острые;* найдемъ:

$$A = 45°, \quad B = 63° 26' 6'', \quad C = 71° 33' 54''.$$

Итакъ, предложенная задача возможна и допускаетъ *одно* рѣшеніе.

Прибавленія.

34. О рѣшеніи уравненія $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ съ помощью пропорціи $\frac{A + B}{A - B} = \frac{C + D}{C - D}$. Приведя оба уравненія къ нулю, увидимъ, что они равносильны слѣдующимъ: $\frac{A.D - B.C}{B.D} = 0 \ldots$ (a) и $\frac{A.D - B.C}{(A - B)(C - D)} = 0 \ldots$(b). Но ур-іе (b) получается изъ (a) дѣленіемъ первой части (a) на $\frac{(A - B)(C - D)}{B.D}$ или, что̀ то же самое, на $\left(\frac{A}{B} - 1\right)\left(\frac{C}{D} - 1\right) \ldots$(c). Примѣняя сюда § 24, видимъ,

*) Это дало бы *три* тупыхъ угла.

что если произведеніе (c) способно обратиться въ нуль *), то можетъ произойти потеря корней; если же оно обратимо въ ∞ **), то могутъ получиться посторонніе корни.

Покажемъ это на примѣрахъ.

35. Примѣры. Возьмемъ сперва алгебраическій примѣръ.

I. $\frac{2 + x}{2 - x} = \frac{8 + x^3}{8 - x^3} \cdots$ (a). *Рѣшеніе.* 1) Составивъ требуемую производную пропорцію, получимъ (послѣ сокращенія отдѣльныхъ частей и дѣленія обѣихъ на 2):

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{x^3} \cdots \text{(b) или } \frac{x^2 - 4}{x^3} = 0; \text{ откуда } x = 2;\ -2;\ \infty.$$

2) Рѣшимъ теперь ур-іе (a) *обычнымъ* способомъ. Приводя его къ нулю, получимъ $\frac{8x + 4x^2}{8 - x^3} = 0$; отсюда найдемъ $x = 0;\ -2;\ \infty$.

Сравнивая оба отвѣта, видимъ, что въ первомъ случаѣ мы потеряли корень $x = 0$ и получили посторонній корень $x = 2$ ***). Согласно сказанному въ § 34, выраженіе $\left(\frac{A}{B} - 1\right)\left(\frac{C}{D} - 1\right)$ при $x = 0$ обращается въ 0, а при $x = 2$ въ ∞.

II. $\frac{\operatorname{sc} x + 1}{\operatorname{sc} x - 1} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} \cdots$ (a). *Рѣшеніе.* 1) Производная пропорція даетъ $\operatorname{sc} x = 1 : \operatorname{ctg}^2 x \ldots$ (b), откуда: $\frac{1}{\operatorname{cs} x} = \frac{\operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{cs}^2 x}$; $\frac{\operatorname{cs} x - \operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{cs}^2 x} = 0$; $\operatorname{cs} x = \operatorname{sn}^2 x$; $\operatorname{cs} x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

*) Иначе: если $\frac{A}{B}$ или $\frac{C}{D}$ способно обратиться въ 1.

**) Иначе: если $\frac{A}{B}$ или $\frac{C}{D}$ обратимо въ ∞.

***) Для большей наглядности, подставимъ ихъ въ ур-іе (a). 1) Первая подстановка ($x = 0$) дастъ $\frac{2}{2} = \frac{8}{8}$. 2) Вторая подстановка ($x = 2$) приводитъ къ равенству вида $\infty = \infty$. Чтобы раскрыть эту неопредѣленность, составимъ разность обѣихъ частей ур-ія (a): по предыдущему, она есть $\frac{8x + 4x^2}{8 - x^3}$; при $x = 2$ это обращается въ ∞; такимъ образомъ ур-іе (a) *не* удовлетворено.

[При $x = \infty$ мы получимъ также неопредѣленность, но она разрѣшается въ $\frac{1}{-1} = \frac{1}{-1}$].

2) Переходя въ ур-іи (a) на $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cs} x$ и приводя его къ нулю, получимъ $\frac{2 \operatorname{cs} x (\operatorname{cs}^2 x + \operatorname{cs} x - 1)}{(1 - \operatorname{cs} x)(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{cs}^2 x)} = 0$, откуда

$$\operatorname{cs} x = 0;\ \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Такимъ образомъ при первомъ рѣшеніи потерянъ корень $\operatorname{cs} x = 0$ [или $x = 90° + 180°.n$].

III. $\frac{1}{\operatorname{cs} 2x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \ldots$ (a). *Рѣшеніе.* 1) Составивъ производную пропорцію, будемъ имѣть $\frac{1 + \operatorname{cs} 2x}{1 - \operatorname{cs} 2x} = \frac{2 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x - 1 + \operatorname{tg}^2 x} \ldots$ (b). Замѣняя первую часть черезъ $1 : \operatorname{tg}^2 x$ *) и приводя новое уравненіе къ нулю, получимъ $\frac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1)} = 0$; отсюда: $\operatorname{tg} x = \pm 1$, $x = \pm 45° + 180°.n$.

2) Рѣшая уравненія (a) безъ производной пропорціи, найдемъ послѣдовательно: $\frac{1}{\operatorname{cs} 2x} = \operatorname{tg} 2x$; $\frac{1}{\operatorname{cs} 2x} = \frac{\operatorname{sn} 2x}{\operatorname{cs} 2x}$; $\frac{1 - \operatorname{sn} 2x}{\operatorname{cs} 2x} = 0$; $\frac{1 - \operatorname{cs}(90° - 2x)}{\operatorname{sn}(90° - 2x)} = 0$; $\operatorname{tg}(45° - x) = 0$; $45° - x = 180°.m$; $x = 45° - 180°.m$ или, полагая $m = -n$, $x = 45° + 180°.n$.

Такимъ образомъ при первомъ способѣ вошелъ посторонній корень $x = -45° + 180°.n$ **).

IV. $\frac{\operatorname{sn}(x + 45°)}{\operatorname{sn}(x - 45°)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \ldots$ (a). *Рѣшеніе.* 1) Составляя производную пропорцію и преобразуя отношеніе суммы синусовъ къ ихъ разности***), получимъ $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} 45° = 2\sqrt{3} : 2 \ldots$ (b) или $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, откуда $x = 60° + 180°.n$. Полученные корни не обращаютъ первой части ур-ія (a) ни въ ∞, ни въ 1; слѣдов. нѣтъ ни постороннихъ корней, ни потерянныхъ. Такимъ образомъ ур-ія (b) и (a) равносильны.

---

*) $(1 + \operatorname{cs} 2x) : (1 - \operatorname{cs} 2x) = 2 \operatorname{cs}^2 x : 2 \operatorname{sn}^2 x$.

**) Непригодность корня $\operatorname{tg} x = -1$ для уравненія (a) будетъ видна и изъ самаго ур-ія, если мы воспользуемся тождествомъ $\operatorname{cs} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$: тогда ур-іе (a) замѣнится такимъ ур-іемъ $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$.

***) См. въ § 79 (вып. перв.) формулу XXVII.

2) Для сравненія, приводимъ другой способъ, гдѣ равносильность уравненій *очевидна.* — Такъ какъ $\operatorname{sn}(x + 45°) = \operatorname{cs}(45° - x) = \operatorname{cs}(x - 45°)$ и $(\sqrt{3} + 1) : (\sqrt{3} - 1) = 2 + \sqrt{3}$, то уравненіе (a) замѣнится такимъ: $\operatorname{ctg}(x - 45°) = 2 + \sqrt{3}$; отсюда:

$$x - 45° = 15° + 180°.n,\quad x = 60° + 180°.n.$$

36. Къ § 30. Слѣдующіе примѣры показываютъ, какой осторожности требуютъ случаи, разсматриваемые въ § 30.

I. Сначала найдемъ зависимость между α и β, если $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$. — Разсуждаемъ такъ: чтобы тангенсы были равны, концы дугъ должны или совпадать или быть на одномъ діаметрѣ; отсюда слѣдуетъ, что $\alpha = \beta + 180°.n$.

Теперь примѣнимъ эту формулу къ ур-ію $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \ldots$ (a). Будемъ имѣть $3x = x + 180°.n$, откуда $x = 90°.n$.

Но сдѣлаемъ повѣрку найденнаго корня, для чего представимъ его въ такомъ видѣ: $x = 90°.2\kappa$, $90°(2\kappa + 1)$.

1) Подстановка $x = 90°.2\kappa$ даетъ $\operatorname{tg}(180°.3\kappa) = \operatorname{tg}(180°.\kappa)$ или $0 = 0$.

2) Подставляя $x = 90°(2\kappa + 1)$, получимъ $\operatorname{tg} 270° = \operatorname{tg} 90°$ или $\infty = \infty$, что требуетъ разбора. Для наглядности, поступимъ слѣдующимъ образомъ: такъ какъ уголъ $90°(2\kappa + 1)$ надо считать *предѣльнымъ*, то полагаемъ сначала $x = 90°(2\kappa + 1) + \varepsilon$, гдѣ ε есть уголъ *произвольно* уменьшимый (положительный или отрицательный); тогда $3x = 270°(2\kappa + 1) + 3\varepsilon$. Послѣ этого будемъ имѣть $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(270° + 3\varepsilon) - \operatorname{tg}(90° + \varepsilon) = \operatorname{ctg} \varepsilon - \operatorname{ctg} 3\varepsilon$, что при $\varepsilon = 0$ даетъ $\infty - \infty$; но $\operatorname{ctg} \varepsilon - \operatorname{ctg} 3\varepsilon = \frac{\operatorname{sn} 2\varepsilon}{\operatorname{sn} 3\varepsilon . \operatorname{sn} \varepsilon} = \frac{2 \operatorname{cs} \varepsilon}{\operatorname{sn} 3\varepsilon}$, а это при $\varepsilon = 0$ обращается въ $\frac{2}{0}$ или ∞.

Такимъ образомъ $x = 90°(2\kappa + 1)$ оказалось непригоднымъ для уравненія (a). Это обстоятельство объясняется тѣмъ, что уравненіе рѣшено съ помощью формулы, которая предполагаетъ *точное* сравненіе тангенсовъ*). [Примѣняя способъ, указанный въ § 30, получимъ: $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$; $\frac{\operatorname{sn} 2x}{\operatorname{cs} 3x . \operatorname{cs} x} = 0$; $\frac{2 \operatorname{sn} x}{\operatorname{cs} 3x} = 0$; $\operatorname{sn} x = 0$; $x = 180°.n$].

---

*) Иначе: *конечныя* значенія тангенсовъ.

II. Возьмемъ еще ур-іе $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} x \dots$ (a). Примѣняя тотъ же способъ, какъ въ примѣрѣ I, получимъ $2x = x + 180°.n$ или $x = 180°.n$; а на самомъ дѣлѣ ур-іе (a) невозможно, такъ какъ оно сводится къ требованію $\csc 2x = 0$.

37. Примѣненіе неопредѣленныхъ уравненій. Въ §§ 15 и 16 намъ приходилось рѣшать вопросъ о нулевомъ и безконечномъ значеніи тригонометрической функціи при данной частной подстановкѣ; но встрѣтившіеся случаи принадлежали къ числу простыхъ, рѣшаемыхъ почти наглядно.

Въ болѣе сложныхъ случаяхъ удобно пользоваться теоріей неопредѣленныхъ уравненій. Покажемъ это на примѣрахъ.

I. Пусть $x = 18° + 72°.n$ подставляется въ $\operatorname{sc} x$ и надо опредѣлить, не обращается ли $\operatorname{sc}(18° + 72°.n)$ при нѣкоторыхъ n въ ∞. — Чтобы секансъ былъ равенъ ∞, его аргументъ долженъ быть $90° + 180°.\kappa$; такимъ образомъ предположеніе $\operatorname{sc}(18° + 72°.n) = \infty$ приводитъ къ ур-ію $18° + 72°.n = 90° + 180°.\kappa$, изъ котораго надо опредѣлить n подъ условіемъ, что n и k суть числа цѣлыя; если полученное неопредѣленное ур-іе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній, то это покажетъ, что предположенное не случается.

Обращаемся къ ур-ію $18° + 72°.n = 90° + 180°.\kappa$; приводя его къ нормальному виду, получимъ $72°.n - 180°.\kappa = 72°$ или $2n - 5\kappa = 2$; рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ возможно. Замѣтивъ, что уравненіе удовлетворяется при $n = 1$ и $k = 0$, находимъ для n окончательно: $n = 1 + 5t$, гдѣ t есть неопредѣленное цѣлое число. Это и есть общій видъ тѣхъ значеній n, при которыхъ $\operatorname{sc}(18° + 72°.n)$ обращается въ ∞.

II. Примѣнимъ сказанное къ § 15 прим. I.—Для $\operatorname{tg}(45° + 90°.n) = \infty$ требуется $45° + 90°.n = 90° + 180°.\kappa$ или $90°.n - 180°.\kappa = 45°$; но это ур-іе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній, такъ какъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ имѣютъ общаго дѣлителя (90), на который не дѣлится вторая часть. Слѣдовательно $\operatorname{tg}(45° + 90°.n)$ не обращается въ ∞.

III. Опредѣлимъ еще, можетъ ли быть $1 + \operatorname{cs}^3 x = 0$ при $x = 108° + 504°.n$. — Изъ ур-ія $1 + \operatorname{cs}^3 x = 0$ получимъ: $\operatorname{cs} x = -1$ $x = 180° + 360°.\kappa$; такимъ образомъ вопросъ рѣшается ур-іемъ $108° + 504°.n = 180° + 360°.\kappa$ или $7n - 5\kappa = 1$. Цѣлыя рѣшенія въ немъ есть, слѣдовательно предположенный случай возможенъ $(n = 3 + 5t)$.

38. Разсмотримъ еще одно примѣненіе неопредѣленныхъ ур-ій.

I. Рѣшимъ ур-іе $\operatorname{sn}\frac{2x}{3}.\operatorname{cs} 5x = 0 \dots$ (a). 1) Полагая $\operatorname{sn}\frac{2x}{3} = 0$, найдемъ $x_1 = 270°.n$; 2) полагая $\operatorname{cs} 5x = 0$, найдемъ $x_2 = 18° + 36°.\kappa$. Всѣ полученные углы пригодны и для уравненія (a).

Но посмотримъ, нѣтъ ли *повтореній* въ корняхъ, т.-е. нѣтъ ли такихъ угловъ, которые встрѣчаются въ обѣихъ полученныхъ прогрессіяхъ. Полагая $x_1 = x_2$, будемъ имѣть $270°.n = 18° + 36°.\kappa$ или $15n - 2\kappa = 1$; это уравненіе цѣлыя рѣшенія имѣетъ, слѣдоват. повторенія есть; для n и κ получимъ окончательно: $n = 2t - 1$ и $\kappa = 15t - 8$.

Исключимъ теперь изъ одного ряда тѣ углы, которые встрѣчаются въ обоихъ; проще исключить ихъ изъ x_1: замѣтимъ, что $2t - 1$ есть общій видъ нечетныхъ чиселъ; слѣдовательно, чтобы не было повтореній, достаточно въ $x_1 = 270°.n$ придавать n только четныя значенія. Полагая $n = 2t$, получимъ $x_1 = 540°.t$.

Итакъ, безъ повтореній будемъ имѣть: $x = 540°.t,\ 18° + 36°.\kappa$.

II. Изъ ур-ія $\operatorname{sn} 3x.\operatorname{cs}(30° + x) = 0 \dots$ (a) найдемъ $x_1 = 60°.n$ и $x_2 = 60° + 180°.\kappa$. Полагая $x_1 = x_2$, получимъ $n = 1 + 3\kappa$; здѣсь *всякому* цѣлому κ соотвѣтствуетъ цѣлое же n; слѣдов. *каждый* уголъ ряда x_2 имѣетъ равный себѣ въ рядѣ x_1; такимъ образомъ x_1 *включаетъ* въ себѣ x_2.

Итакъ, для того, чтобы выразить всѣ *различные* корни ур-ія (a), достаточно одной формулы $x = 60°.n$.

39. О формулахъ, которыми выражаются корни тригонометрическаго уравненія. Въ § 15 прим. IV и V мы имѣли образецъ того, какъ *форма* отвѣта зависитъ отъ способа рѣшенія. Такіе случаи въ тригонометрическихъ уравненіяхъ очень обыкновенны, и полезно поэтому остановиться на нихъ. Разберемъ нѣсколько случаевъ.

I. Въ § 15 прим. III получено: $x = 360°.n,\ 180° + 360°.n$; а преобразованное ур-іе ($\operatorname{sn} x = 0$) даетъ прямо $x = 180°.m$. Чтобы показать, что оба отвѣта выражаютъ одно и то же, представимъ первый изъ нихъ въ такомъ видѣ: $x = 180°.2n,\ 180°.(2n + 1)$; здѣсь $180°$ умножается сначала на всѣ четныя числа, а затѣмъ на всѣ нечетныя, слѣдовательно, въ общемъ, на всѣ безъ исключенія цѣлыя числа, а потому $x = 180°.m$.

II. Въ § 15 прим. I получено $x = 45° + 90°.n$, а преобразованное ур-іе $\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2} = 0\right)$ даетъ $x = \pm 45° + 180°.m$. Тожде-

ственность обоихъ рѣшеній будетъ ясна, если представить первое изъ нихъ въ такомъ видѣ: $x = 45° + 90°.\,2m,\ 45° + 90°.\,(2m-1)$.

III. Въ § 59 вып. перв. было показано, что $x_1 = 30° + 360°.\,n$ и $x_2 = 150° + 360°.\,n$ можно слить въ *одну* формулу:

$$x = 180°.\,m + (-1)^m.\,30°.$$

IV. Вотъ еще примѣръ объединенія формулъ. Рѣшая ур-іе $1 + \text{cs}\,x = 2\,\text{cs}^2\,x$, найдемъ: $x_1 = 360°.\,n$, $x_2 = 120° + 360°.\,n$ и $x_3 = -120° + 360°.\,n$. Эти три прогрессіи можно слить въ одну. Дѣйствительно, представимъ ихъ въ такомъ видѣ: $x_1 = 120°.\,3n$, $x_2 = 120°(3n+1)$ и $x_3 = 120°(3n-1)$; теперь замѣтимъ, что $3n$ есть формула чиселъ, дѣлящихся на 3; въ промежуткахъ между такими числами содержатся по два числа: изъ нихъ одно подходитъ подъ формулу $3n+1$, а другое — подъ формулу $3n-1$ *); такимъ образомъ совокупность формулъ $3n$, $3n+1$ и $3n-1$ обнимаетъ *всѣ* цѣлыя числа, а потому x_1, x_2 и x_3 сливаются въ $x = 120°.\,m$.

V. Сравнимъ формулы, полученныя въ прим. IV и V § 15. Имѣемъ: § 15, IV) $x = 90° + 180°.\,n$; $60°(3k \pm 1)$.

§ 15, V) $x = 90° + 180°.\,n$; $\pm 60° + 360°.\,n$; $\pm 120° + 360°.\,n$

или $x = 90° + 180°.\,n$; $60°(6n \pm 1)$; $60°(6n \pm 2)$.

Такимъ образомъ требуется показать, что формула $3k \pm 1$...(a) равносильна совокупности формулъ $6n \pm 1$... (b) и $6n \pm 2$...(c). Дѣйствительно, формула (a) заключаетъ въ себѣ всѣ числа не дѣлящіяся на 3 (см. предыд. прим.); но тѣ же самыя числа выражаются и формулами (b) и (c), съ той только разницей, что здѣсь они сгруппированы около чиселъ дѣлящихся на 6. Для наглядности, приводимъ примѣръ:

$$\ldots -3, \overbrace{\underset{6n-2}{-2}, \underset{6n-1}{-1}, 0, \underset{6n+1}{1}, \underset{6n+2}{2}}, 3, \overbrace{\underset{6n-2}{4}, \underset{6n-1}{5}, 6, \underset{6n+1}{7}, \underset{6n+2}{8}}, 9, \ldots$$

40. ***Общее замѣчаніе къ § 39.*** Въ вопросахъ, подобныхъ только что разсмотрѣннымъ, нерѣдко бываетъ полезно начать съ частныхъ случаевъ. Пусть, напр., изслѣдуется совокупность формулъ: $6n-1$, $6n+1$ и $6n+3$. Напишемъ *по порядку величины* нѣсколько чиселъ этого вида, напримѣръ:

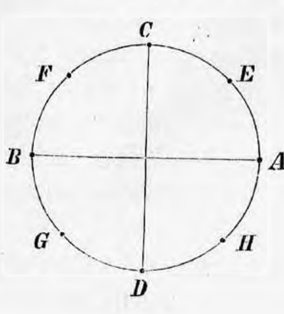
$$\ldots, \overbrace{-1, 1, 3}^{n=0}, \overbrace{5, 7, 9}^{n=1}, \overbrace{11, 13, 15}^{n=2}, \ldots$$

*) Напримѣръ: ..., 12, 13, 14, 15, ...; $13 = 3.4 + 1$
$14 = 3.5 - 1$.

Теперь замѣчаемъ, что данныя три формулы равносильны одной слѣдующей: $2k + 1$

Иногда форма отвѣта легко упрощается *геометрическими* соображеніями. Такъ, рѣшая уравненіе $\text{sn}\,x = 3\,\text{sn}^3 x - 2\,\text{sn}^5 x$, получимъ: $\text{sn}\,x = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; откуда: $x = 180°.\,n$, $\pm 90° + 360°.\,n$, $\pm 45° + 360°.\,n$, $\pm 135° + 360°.\,n$.

Теперь обратимъ вниманіе на то, какія *точки* на окружности соотвѣтствуютъ полученнымъ значеніямъ $\text{sn}\,x$. Имѣемъ: 1) $\text{sn}\,x = 0$ соотвѣтствуютъ A и B; 2) $\text{sn}^2 x = 1$ соотвѣтствуютъ C и D; 3) $\text{sn}^2 x = \frac{1}{2}$ соотвѣтствуютъ средины четвертей: E, F, G и H. Отсюда видно, что *всѣ* значенія x можно выразить формулой $x = 45°.\,n$.



ВЫЧИСЛЕНІЕ ФОРМУЛЪ СЪ ПОМОЩЬЮ НАТУРАЛЬНЫХЪ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ВЕЛИЧИНЪ.

41. Общее замѣчаніе. Названный способъ примѣняютъ тогда, когда при вычисленіи заботятся не столько о его точности, сколько о полученіи результата прямымъ и сокращеннымъ путемъ.

При *грубомъ* вычисленіи было бы излишне примѣнять логариѳмы; поэтому: 1) всѣ дѣйствія выполняются въ этомъ случаѣ непосредственно, и 2) для тригонометрическихъ функцій берутъ таблицы *натуральныхъ* значеній, притомъ съ небольшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ. Такъ, напримѣръ, будутъ вполнѣ достаточны тѣ таблицы, которыя приложены въ концѣ этой книги.

[Въ нихъ углы идутъ черезъ полградуса, а тригонометрическія функціи даны съ двумя десятичными знаками и точны до половины 0,01; черта надъ послѣдней цифрой числа показываетъ, что это число *больше* истиннаго значенія*). Интерполяція**) — въ случаѣ надобности — дѣлается такъ же, какъ въ логариѳмическихъ таблицахъ.]

42. Перейдемъ къ примѣрамъ. Для сравненія будемъ то же самое вычислять еще по логариѳмамъ (пятизначнымъ).

Примѣры. I. Вычислить $x = 210.(\text{sn}\,22°\,18' + \text{tg}\,62°\,15')$.

Рѣшеніе. Уголъ $22°\,18'$ ближе къ $22°\,30'$, чѣмъ къ $22°\,0'$; поэтому смотримъ въ таблицѣ $\text{sn}\,22°\,30' = 0{,}38$.

Уголъ $62°\,15'$ есть средній между $62°$ и $62°\,30'$; поэтому беремъ среднее между $\text{tg}\,62°$ и $\text{tg}\,62°\,30'$, т.-е. принимаемъ $\text{tg}\,62°\,15' = 1{,}90$. Такимъ образомъ получимъ $x = 210.(0{,}38 + 1{,}90) = 210.2{,}28 = 478{,}8$.

---

*) Такъ что $0{,}2\overline{6}$ означаетъ: 0,26 *невступно*.

Приблизительныя равенства:

1) $\text{sn}\,11°\,30' = 0{,}2\overline{0}$, 2) $\text{sn}\,12°\,30' = 0{,}2\overline{2}$ и 3) $\text{sn}\,13°\,0' = 0{,}22$

надо понимать такъ:

1) $0{,}195 < \text{sn}\,11°\,30' < 0{,}20$; 2) $0{,}215 < \text{sn}\,12°\,30' < 0{,}22$;

3) $0{,}22 < \text{sn}\,13°\,0' < 0{,}225$.

**) Т.-е. нахожденіе значеній промежуточныхъ между помѣщенными въ таблицѣ.

Рѣшая ту же задачу съ помощью логариѳмовъ, найдемъ $x = 478{,}833$. Если не цѣнить мелкихъ долей единицы, то первый способъ лучше, такъ какъ при немъ меньше работы.

II. Вычислить $x = 10.(1 - \text{cs}\,7°)$.

Рѣшеніе. Имѣемъ $\text{cs}\,7° = 0{,}99$; слѣдов. $x = 0{,}1$. Или болѣе точно: $x = 10.2\,\text{sn}^2\,3°\,30' = 20.(0{,}06)^2 = 0{,}072$. Логариѳмы даютъ $x = 0{,}07454$.

III. По катету $a = 356$ и углу $A = 18°\,43'$ опредѣлить гипотенузу.

Рѣшеніе. Имѣемъ: $c = a : \text{sn}\,A = 356 : 0{,}32$*) $= 1112{,}5$.

По логариѳмамъ находимъ $c = 1109{,}4$.

IV. Даны гипотенуза $c = 125$ и катетъ $a = 116$; опредѣлить A и b.

Рѣшеніе. Имѣемъ $\text{sn}\,A = a : c = 116 : 125 = 0{,}9\overline{3}$; послѣ чего въ таблицѣ находимъ $A = 68°\,0'$. Далѣе получимъ: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$**) $= \sqrt{2169} = 46{,}6$.

По логариѳмамъ: $A = 68°\,7'\,36''$ и $b = 46{,}572$.

V. По данному отношенію катетовъ $a : b = 119 : 50$ найти уголъ A.

Рѣшеніе. Имѣемъ $\text{tg}\,A = \frac{a}{b} = 2{,}38$. Въ таблицѣ тангенсовъ находимъ $2{,}3\overline{6}$ и $2{,}41$; первое число ближе къ данному, поэтому принимаемъ $A = 67°\,0'$. Но здѣсь умѣстно также сдѣлать интерполяцію, а именно: увеличенію тангенса на 0,01 соотвѣтствуетъ увеличеніе угла на $\frac{30'}{5} = 6'$; поэтому $A = 67°\,12'$.

Логариѳмы даютъ $A = 67°\,12'\,34''$.

VI. Дано: $a = 250$, $B = 34°\,23'$ и $C = 66°\,58'$. Найти c.

Рѣшеніе. Имѣемъ $c = \frac{a}{\text{sn}\,A} \cdot \text{sn}\,C$ и $A = 180° - (B + C) = 78°\,39'$, принимая $A = 78°\,30'$ и $C = 67°\,0'$, получимъ $c = \frac{250}{0{,}98} \cdot 0{,}92 = 234{,}69$.

По логариѳмамъ $c = 234{,}66$.

VII. Дано: $a = 205$, $c = 200$ и $B = 22°10'$. Найти b въ цѣлыхъ единицахъ.

---

*) $18°\,43'$ ближе къ $18°\,30'$, чѣмъ къ $19°\,0'$.

**) $c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) = 241\,.\,9$.

Рѣшеніе. Имѣемъ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac . \text{cs}\, B = 42025 + 40000 - 82000 . 0{,}927$ *) $= 6011$; отсюда $b = 78$.

При помощи логариѳмовъ получается также $b = 78$.

VIII. Дано: $a = 37$, $b = 13$ и $c = 40$. Найти A и B.

Рѣшеніе. 1) Примѣняя формулу $\text{cs}\, A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$, будемъ имѣть $\text{cs}\, A = \frac{400}{1040} = 0,38$; отсюда $A = 67° 30'$. 2) Примѣняя формулу $\text{cs}\, B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$, получимъ $\text{cs}\, B = \frac{2800}{2960} = 0,9\overline{5}$; такъ какъ это значеніе встрѣчается въ таблицѣ косинусовъ два раза, то вычислимъ $\text{cs}\, B$ съ большей точностью, а именно $\text{cs}\, B = 0,946$.

Теперь найдемъ: $B = 19° 30' - \frac{60'}{10} \cdot 6 = 18° 54'$.

Итакъ найдено: $A = 67° 30'$ и $B = 18° 54'$.

Обратимся къ логариѳмамъ. Вычисляя по $\text{cs}\, A = \frac{400}{1040}$ и $\text{cs}\, B = \frac{2800}{2960}$, получимъ: $A = 67° 22' 48''$ и $B = 18° 55' 24''$.

Вычисленіе по $\text{tg}\,\frac{A}{2}$ и $\text{tg}\,\frac{B}{2}$ даетъ: $A = 67°22'48''$ и $B = 18°55'30''$.

IX. Дано: $a = 105$, $B = 27° 30'$ и $C = 54°$. Найти S.

Рѣшеніе. Вычисляя безъ логариѳмовъ, удобно взять формулу $2\,S = a^2 : (\text{ctg}\, B + \text{ctg}\, C)$.

Найдемъ: $2\,S = 11025 : (1{,}92 + 0{,}73) = 4160{,}4$; $S = 2080{,}2$.

Логариѳмы даютъ **) $S = 2082,\ 2$.

---

*) Для $\text{cs}\, 22° 10'$ сдѣлана интерполяція: такъ какъ $10'$ есть треть полградуса, то изъ $\text{cs}\, 22° 0'$ вычтено $\frac{0{,}01}{3}$.

**) По формулѣ $S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\text{sn}\, B . \text{sn}\, C}{\text{sn}\,(B + C)}$.

ГРАФИЧЕСКОЕ РѢШЕНІЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ; ИНСТРУМЕНТЫ, УПОТРЕБЛЯЕМЫЕ ПРИ ЭТОМЪ СПОСОБѢ.

43. Инструменты. Въ чемъ состоитъ такъ называемое *графическое* рѣшеніе треугольниковъ, — было уже упомянуто въ § 3 перваго выпуска. Теперь скажемъ нѣсколько словъ относительно инструментовъ, которыми пользуются при этомъ способѣ и которые составляютъ главную его принадлежность.

Линейный масштабъ [простой и сложный *)]. Такъ называется приборъ, служащій для отложенія линій по ихъ числовому выраженію и обратно, для измѣренія линій, полученныхъ построеніемъ: онъ позволяетъ соблюсти въ чертежѣ принятый численный масштабъ **).

Свѣдѣнія объ этомъ приборѣ сообщаются обыкновенно въ курсахъ геометріи и потому здѣсь не будемъ повторять ихъ.

Транспортиръ. Съ помощью этого инструмента откладываютъ уголъ по данному числу градусовъ и минутъ***) и, наоборотъ, опредѣляютъ, сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ, взятый на чертежѣ.

Практическія подробности предполагаемъ уже извѣстными учащемуся — по опыту и изъ курса геометріи.

---

*) Иначе называемый *поперечнымъ*.

**) *Численнымъ масштабомъ* называется *отношеніе*, въ какомъ находится длина линій на чертежѣ къ длинѣ тѣхъ же линій въ дѣйствительности. Напримѣръ: если линія на мѣстности имѣетъ длину 10 саж., а въ изображеніи длину 1 дюйма, то численный масштабъ есть 1 : 840 или $\frac{1}{840}$.

(*Нормальнымъ* масштабомъ для плановъ считается $\frac{1}{8400}$ или иначе: 100 саж. въ 1 дюймѣ.)

***) Небольшіе *обыкновенные* транспортиры показываютъ только градусы; на болѣе крупныхъ дѣленія наносятся черезъ полградуса или даже черезъ четверть градуса. Для самыхъ же точныхъ работъ устраиваются *сложные* транспортиры, снабженные *верньеромъ* (на подвижномъ радіусѣ); они показываютъ $5'$ и даже $1'$.

Хордовой масштабъ. Масштабы тригонометрическихъ линій. Это приборы, замѣняющіе транспортиръ, но менѣе его точные и менѣе удобные.

1) *Хордовой масштабъ* представленъ на черт. 3*); онъ показываетъ длину хордъ, при нѣкоторомъ радіусѣ, для дугъ отъ 0 до 90°; радіусъ найдемъ, взявъ хорду для дуги 60° (AC на черт. 3).

Черт. 3. 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
A D C B

Пусть требуется построить на данной прямой при данной точкѣ уголъ 40°. Принявъ данную точку за центръ, опишемъ дугу тѣмъ радіусомъ, по какому составленъ масштабъ; изъ точки пересѣченія этой дуги съ данной прямой, какъ изъ центра, опишемъ новую дугу радіусомъ равнымъ хордѣ для 40° (AD на черт. 3); черезъ точку пересѣченія проведенныхъ дугъ пройдетъ вторая сторона угла.

Для построенія тупого угла сначала получаютъ смежный острый уголъ.

Изъ сказаннаго выше ясно также, какъ производится измѣреніе угла.

2) Чтобы объяснить масштабы тригонометрическихъ линій, возьмемъ для примѣра *масштабъ тангенсовъ* **), изображенный на черт. 4. Онъ показываетъ длину тангенса, при нѣкоторомъ радіусѣ, для угловъ отъ 0 до 45°; радіусъ найдемъ, взявъ тангенсъ 45°.

Черт. 4. 0 5 10 15 20 25 30 35 40 45
A C B

Пусть требуется построить уголъ 35°. Для этого отъ данной точки M на данной прямой отложимъ часть MN равную радіусу масштаба (AB на черт. 4); изъ точки N возставимъ перпендикуляръ къ MN и на немъ отложимъ часть NP равную тангенсу 35° (AC на черт. 4); тогда уголъ PMN есть искомый.

Если уголъ болѣе 45°, то, возставивъ изъ точки M перпендикуляръ MQ, строимъ уголъ QMR, дополнительный до 90° къ требуемому. Если уголъ тупой, то сначала строимъ или смежный уголъ, или прибавку къ 90°, смотря по тому, что менѣе 45°.

Способъ измѣренія угла ясенъ изъ предыдущаго.

---

*) Для простоты, чертежъ размѣченъ не сполна, а только черезъ 10°.

**) Здѣсь и далѣе въ объясненіи слово „тангенсъ" означаетъ не тригонометрическую функцію, а соотвѣтствующую ей тригонометрическую линію.

44. Понятіе о степени точности графическаго рѣшенія. Пусть требуется рѣшить треугольникъ, если даны двѣ стороны: 7158 саж. и 6084 саж. и уголъ между ними $56°\,23'\,47''$ *); посмотримъ, какъ это сдѣлать графически.

Сначала отложимъ данный уголъ; но даже самые лучшіе транспортиры различаютъ только минуты; поэтому придется построить уголъ приблизительно.

На сторонахъ этого угла надо будетъ отложить данныя длины въ какомъ-нибудь масштабѣ. Самая мелкая длина, различимая на бумагѣ, это—двухсотая доля дюйма; если ее взять для выраженія одной сажени, то данныя стороны треугольника передадутся на чертежѣ линіями, превышающими 35 дюйм. и 30 дюйм. (болѣе аршина), что очень неудобно. Чтобы уменьшить чертежъ, надо будетъ взять болѣе мелкій масштабъ, но тогда стороны треугольника придется отложить только приблизительно.

Построивъ треугольникъ и измѣряя третью сторону и неизвѣстные углы, мы встрѣтимъ тѣ же самыя затрудненія.

Но кромѣ большей или меньшей *точности* инструментовъ здѣсь имѣетъ значеніе еще *качество* ихъ и чертежныхъ принадлежностей вообще, а также *искусство* того, кто дѣлаетъ чертежъ.

Такъ какъ указанныя вліянія существенны, а между тѣмъ таковы, что узнать *предѣлъ погрѣшности* нельзя, то графическій способъ не можетъ считаться надежнымъ. Но онъ съ удобствомъ примѣняется въ томъ случаѣ, когда желаютъ получить результатъ возможно скорѣе или когда точное вычисленіе было бы излишне — въ виду ненадежности самихъ данныхъ. Такъ, если опредѣляя разстояніе между двумя неприступными точками (§ 158, вып. перв.), мы измѣримъ углы какимъ-либо *грубымъ* инструментомъ (напр. буссолью) съ точностью до $\frac{1^\circ}{4}$, то будетъ *достаточно*, если мы получимъ искомое разстояніе построеніемъ **) (между тѣмъ какъ вычисленіе здѣсь довольно сложное).

---

*) По поводу данныхъ чиселъ замѣтимъ, что въ геодезіи нерѣдко приходится рѣшать треугольники, стороны которыхъ достигаютъ 20 верстъ (10000 саж.), а углы выражены даже въ доляхъ секунды. (Секунды и ихъ доли при измѣреніи получаются тогда, когда берутъ среднее ариѳметическое изъ нѣсколькихъ измѣреній одного и того же угла, сдѣланныхъ съ помощью весьма точнаго теодолита.)

**) А. Бикъ. Курсъ низшей геодезіи. Т. II, § 25.

Таблица натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ. I.

°	′	sn	tg	ctg	cs	′	°
0	0	0,00	0,00	∞	1,00	0	90
0	30	0,0$\overline{1}$	0,0$\overline{1}$	114,5$\overline{9}$	1,0$\overline{0}$	30	89
1	0	0,0$\overline{2}$	0,0$\overline{2}$	57,2$\overline{9}$	1,0$\overline{0}$	0	89
1	30	0,0$\overline{3}$	0,0$\overline{3}$	38,1$\overline{9}$	1,0$\overline{0}$	30	88
2	0	0,03	0,03	28,6$\overline{4}$	1,0$\overline{0}$	0	88
2	30	0,04	0,04	22,90	1,0$\overline{0}$	30	87
3	0	0,05	0,05	19,08	1,0$\overline{0}$	0	87
3	30	0,06	0,06	16,3$\overline{5}$	1,0$\overline{0}$	30	86
4	0	0,0$\overline{7}$	0,0$\overline{7}$	14,30	1,0$\overline{0}$	0	86
4	30	0,0$\overline{8}$	0,0$\overline{8}$	12,7$\overline{1}$	1,0$\overline{0}$	30	85
5	0	0,0$\overline{9}$	0,0$\overline{9}$	11,43	1,0$\overline{0}$	0	85
5	30	0,1$\overline{0}$	0,1$\overline{0}$	10,3$\overline{9}$	1,0$\overline{0}$	30	84
6	0	0,10	0,1$\overline{1}$	9,51	0,99	0	84
6	30	0,11	0,11	8,7$\overline{8}$	0,99	30	83
7	0	0,12	0,12	8,14	0,99	0	83
7	30	0,13	0,13	7,6$\overline{0}$	0,99	30	82
8	0	0,1$\overline{4}$	0,14	7,1$\overline{2}$	0,99	0	82
8	30	0,1$\overline{5}$	0,1$\overline{5}$	6,69	0,9$\overline{9}$	30	81
9	0	0,1$\overline{6}$	0,1$\overline{6}$	6,31	0,9$\overline{9}$	0	81
9	30	0,1$\overline{7}$	0,1$\overline{7}$	5,9$\overline{8}$	0,9$\overline{9}$	30	80
10	0	0,17	0,1$\overline{8}$	5,67	0,98	0	80
10	30	0,18	0,1$\overline{9}$	5,4$\overline{0}$	0,98	30	79
11	0	0,19	0,19	5,14	0,98	0	79
11	30	0,2$\overline{0}$	0,20	4,9$\overline{2}$	0,9$\overline{8}$	30	78
12	0	0,2$\overline{1}$	0,21	4,70	0,9$\overline{8}$	0	78
12	30	0,2$\overline{2}$	0,22	4,51	0,9$\overline{8}$	30	77
13	0	0,22	0,23	4,33	0,97	0	77
13	30	0,23	0,24	4,1$\overline{7}$	0,97	30	76
14	0	0,24	0,2$\overline{5}$	4,01	0,97	0	76
14	30	0,25	0,2$\overline{6}$	3,8$\overline{7}$	0,9$\overline{7}$	30	75
15	0	0,2$\overline{6}$	0,2$\overline{7}$	3,73	0,9$\overline{7}$	0	75
°	′	cs	ctg	tg	sn	′	°

Таблица натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ. II.

°	′	sn	tg	ctg	cs	′	°
15	0	0,2$\overline{6}$	0,2$\overline{7}$	3,73	0,9$\overline{7}$	0	75
15	30	0,2$\overline{7}$	0,2$\overline{8}$	3,6$\overline{1}$	0,96	30	74
16	0	0,2$\overline{8}$	0,2$\overline{9}$	3,4$\overline{9}$	0,96	0	74
16	30	0,28	0,3$\overline{0}$	3,3$\overline{8}$	0,9$\overline{6}$	30	73
17	0	0,29	0,3$\overline{1}$	3,27	0,9$\overline{6}$	0	73
17	30	0,30	0,3$\overline{2}$	3,17	0,95	30	72
18	0	0,3$\overline{1}$	0,32	3,0$\overline{8}$	0,95	0	72
18	30	0,3$\overline{2}$	0,33	2,9$\overline{9}$	0,9$\overline{5}$	30	71
19	0	0,3$\overline{3}$	0,34	2,90	0,9$\overline{5}$	0	71
19	30	0,33	0,35	2,82	0,94	30	70
20	0	0,34	0,36	2,7$\overline{5}$	0,9$\overline{4}$	0	70
20	30	0,35	0,37	2,67	0,9$\overline{4}$	30	69
21	0	0,3$\overline{6}$	0,38	2,6$\overline{1}$	0,93	0	69
21	30	0,3$\overline{7}$	0,39	2,5$\overline{4}$	0,93	30	68
22	0	0,37	0,40	2,4$\overline{8}$	0,9$\overline{3}$	0	68
22	30	0,38	0,41	2,41	0,92	30	67
23	0	0,39	0,42	2,3$\overline{6}$	0,92	0	67
23	30	0,4$\overline{0}$	0,43	2,3$\overline{0}$	0,9$\overline{2}$	30	66
24	0	0,4$\overline{1}$	0,4$\overline{5}$	2,2$\overline{5}$	0,91	0	66
24	30	0,41	0,4$\overline{6}$	2,19	0,9$\overline{1}$	30	65
25	0	0,42	0,4$\overline{7}$	2,14	0,9$\overline{1}$	0	65
25	30	0,43	0,4$\overline{8}$	2,1$\overline{0}$	0,90	30	64
26	0	0,4$\overline{4}$	0,4$\overline{9}$	2,05	0,9$\overline{0}$	0	64
26	30	0,4$\overline{5}$	0,5$\overline{0}$	2,0$\overline{1}$	0,89	30	63
27	0	0,45	0,5$\overline{1}$	1,96	0,89	0	63
27	30	0,46	0,52	1,92	0,8$\overline{9}$	30	62
28	0	0,4$\overline{7}$	0,53	1,88	0,88	0	62
28	30	0,4$\overline{8}$	0,54	1,84	0,8$\overline{8}$	30	61
29	0	0,48	0,55	1,80	0,87	0	61
29	30	0,49	0,5$\overline{7}$	1,7$\overline{7}$	0,87	30	60
30	0	0,50	0,5$\overline{8}$	1,73	0,8$\overline{7}$	0	60
°	′	cs	ctg	tg	sn	°	′

Таблица натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ. III.

°	′	sn	tg	ctg	cs	′	°
30	0	0,50	$0,5\overline{8}$	1,73	$0,8\overline{7}$	0	60
30	30	$0,5\overline{1}$	$0,5\overline{9}$	$1,7\overline{0}$	0,86	30	59
31	0	$0,5\overline{2}$	0,60	1,66	$0,8\overline{6}$	0	59
31	30	0,52	0,61	1,63	0,85	30	58
32	0	$0,5\overline{3}$	0,62	1,60	$0,8\overline{5}$	0	58
32	30	$0,5\overline{4}$	$0,6\overline{4}$	$1,5\overline{7}$	0,84	30	57
33	0	0,54	$0,6\overline{5}$	$1,5\overline{4}$	$0,8\overline{4}$	0	57
33	30	0,55	0,66	1,51	0,83	30	56
34	0	$0,5\overline{6}$	0,67	1,48	$0,8\overline{3}$	0	56
34	30	$0,5\overline{7}$	$0,6\overline{9}$	$1,4\overline{6}$	0,82	30	55
35	0	0,57	0,70	$1,4\overline{3}$	$0,8\overline{2}$	0	55
35	30	0,58	0,71	1,40	0,81	30	54
36	0	$0,5\overline{9}$	$0,7\overline{3}$	$1,3\overline{8}$	$0,8\overline{1}$	0	54
36	30	0,59	$0,7\overline{4}$	1,35	0,80	30	53
37	0	0,60	0,75	$1,3\overline{3}$	$0,8\overline{0}$	0	53
37	30	$0,6\overline{1}$	$0,7\overline{7}$	1,30	0,79	30	52
38	0	$0,6\overline{2}$	0,78	$1,2\overline{8}$	$0,7\overline{9}$	0	52
38	30	0,62	$0,8\overline{0}$	$1,2\overline{6}$	0,78	30	51
39	0	$0,6\overline{3}$	$0,8\overline{1}$	1,23	$0,7\overline{8}$	0	51
39	30	$0,6\overline{4}$	0,82	1,21	0,77	30	50
40	0	0,64	$0,8\overline{4}$	1,19	$0,7\overline{7}$	0	50
40	30	$0,6\overline{5}$	0,85	1,17	0,76	30	49
41	0	$0,6\overline{6}$	$0,8\overline{7}$	1,15	0,75	0	49
41	30	0,66	0,88	1,13	$0,7\overline{5}$	30	48
42	0	$0,6\overline{7}$	0,90	1,11	0,74	0	48
42	30	$0,6\overline{8}$	$0,9\overline{2}$	1,09	$0,7\overline{4}$	30	47
43	0	0,68	0,93	1,07	0,73	0	47
43	30	$0,6\overline{9}$	$0,9\overline{5}$	1,05	$0,7\overline{3}$	30	46
44	0	0,69	$0,9\overline{7}$	$1,0\overline{4}$	$0,7\overline{2}$	0	46
44	30	0,70	0,98	$1,0\overline{2}$	0,71	30	45
45	0	$0,7\overline{1}$	1,00	1,00	$0,7\overline{1}$	0	45
°	′	cs	ctg	tg	sn	′	°

Списокъ разсмотрѣнныхъ тригонометрическихъ уравненій.

§§

$3\,\mathrm{sn}\,x = 2\,\mathrm{cs}^2 x$ . . . . 11 *a*.
$\mathrm{tg}\,x = 3\,\mathrm{ctg}\,x$ . . . . . . 11 *b*; 22 I.
$\mathrm{ctg}\,x = -\,\mathrm{sn}\,x$ . . . . . 11 *c*; 22 I.
$\mathrm{ctg}\,x\,.\,\mathrm{sn}\,2x = 1$ . . . . 11 *f*.
$\mathrm{sn}\,2x = \mathrm{sn}^2 x - \mathrm{cs}^2 x$. 11 *g*; 25 I.
$\mathrm{ctg}\,2x\,.\,\mathrm{tg}\,x = 0$ . . . . 15 I; 39 II.
$\mathrm{csc}^2\,2x\,.\,\mathrm{sn}\,x = 0$ . . . . 15 II.
$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}(1+\mathrm{cs}\,x) = 0$ . . 15 III; 39 I.
$\mathrm{ctg}\,x\,.\,\mathrm{sn}\,3x = 0$ . . 15 IV, V; 39 V.
$\frac{\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{cs}\,x} = 0$ . . . . 18 I.
$\frac{1-\mathrm{cs}\,2x}{\mathrm{sn}\,2x} = 0$ . . . . 18 II.
$\frac{2+\mathrm{cs}\,x}{2+\mathrm{ctg}\,x} = 0$ . . . . 18 III.
$\frac{\mathrm{csc}\,2x}{\mathrm{tg}\,x} = 0$ . . . . 18 V.
$\mathrm{tg}\,x = \mathrm{ctg}\,x$ . . . . 21 I.
$\mathrm{sn}\,x = \frac{\mathrm{sn}\,x + 2\,\mathrm{cs}\,x}{1+\mathrm{ctg}\,x}$ . . . . . 22 II.
$\frac{\mathrm{sn}\,2x}{\mathrm{sn}\,x} = \frac{\mathrm{cs}\,2x}{\mathrm{cs}\,x}$ . . . . 22 III.
$\frac{\mathrm{sn}\,x}{1+\mathrm{cs}\,x} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,x} = 2$ . . . . . 22 IV.

§§

$\frac{1}{\mathrm{sn}\,x} = \mathrm{ctg}\,x$ . . . . 22 V.
$\frac{\mathrm{sn}^2 x}{1+\mathrm{sn}^2 x} = \frac{1}{2}$ . . . . 22 VI.
$1 - \mathrm{cs}\,x = \mathrm{sn}\,x$ . . . . . . 25 II.
$\sqrt{\frac{3}{2}\,\mathrm{sn}\,x} = -\,\mathrm{cs}\,x$ . . . . 27 II.
$\mathrm{sn}\,3x = \sqrt{\mathrm{sn}^2\,\frac{3x}{4}}$ . . . . 27 III.
$\mathrm{sn}^2 x = \mathrm{sn}^2 \alpha$ . . . . 30 II.
$\mathrm{tg}\,4x = \mathrm{tg}\,x$ . . . . 30 IV.
$\mathrm{sc}\,3x = \mathrm{sc}\,x$ . . . . 30 V.
$\mathrm{csc}\,x = \mathrm{csc}\,\frac{x}{2}$ . . . . 32 III.
$\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\mathrm{sn}\,4x} - \mathrm{tg}\,2x$ . . . 33 VIII.
$\frac{1}{\mathrm{cs}\,2x} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$ . . . . . 35 III.
$\mathrm{tg}\,3x = \mathrm{tg}\,x$ . . . . 36 I.
$\mathrm{ctg}\,2x = \mathrm{ctg}\,x$ . . . . 36 II.
$\mathrm{sn}\,\frac{2x}{3}\cdot\mathrm{cs}\,5x = 0$ . . . . 38 I.
$\mathrm{sn}\,3x\,.\,\mathrm{cs}\,(30^\circ + x) = 0$ . . 38 II.
$1 + \mathrm{cs}\,x = 2\,\mathrm{cs}^2 x$ . . . . . 39 IV.

$2\,\mathrm{sn}^2 x - 3\,\mathrm{cs}^2 x = 5\,\mathrm{sn}\,x\,.\,\mathrm{cs}\,x$ . . . . 11 *d*; 25 I.
$3\,\mathrm{sn}\,x + 4\,\mathrm{cs}\,x = 5$ . . . . 11 *e*; 12; 22 I; 27 I; 32 VI.
$\mathrm{cs}\left(180^\circ + \frac{x}{3}\right)\cdot\mathrm{cs}\left(270^\circ + \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{4}$ . . . . 11 *h*.
$2\,\mathrm{sn}\,x - 3\,\mathrm{cs}\,x = 3$ . . . . 12 (прим. 1 и 2); 18 IV.
$\mathrm{sn}^5 x + \mathrm{sn}^3 x\,.\,\mathrm{cs}^2 x + 8\,\mathrm{sn}^2 x\,.\,\mathrm{cs}^3 x + 8\,\mathrm{cs}^5 x = 0$ . . . . 25 I.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЯХЪ.

Стран.

ТОГО ЖЕ АВТОРА

ИМѢЮТСЯ ВЪ ПРОДАЖѢ:

1. **Прямолинейная тригонометрія. Выпускъ первый**, содержащій курсъ гимназій. Изданіе 2-е. Москва, 1903. Цѣна 75 коп.
2. **Учебникъ прямолинейной тригонометріи.** Изданіе 4-е, соединенное съ **собраніемъ задачъ.** Москва, 1905. Цѣна 90 коп.
3. **Сборникъ геометрическихъ задачъ. Ч. I. (Планиметрія).** Изданіе 2-е. Москва, 1904. Цѣна 65 коп.
4. **Сборникъ геометрическихъ задачъ. Ч. II. (Стереометрія).** Изданіе 2-е. Москва, 1905. Цѣна 60 коп.
5. **Собраніе стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненія тригонометріи.** Изданіе 7-е. Москва, 1905. Цѣна 45 коп.

Складъ въ магазинѣ **„Сотрудникъ школъ“** А. К. Залѣсской
(Москва, Воздвиженка, д. Армандъ).

ТОГО ЖЕ АВТОРА

ИМѢЮТСЯ ВЪ ПРОДАЖѢ:

1. **Прямолинейная тригонометрія. Выпускъ первый**, содержащій курсъ гимназій. Изданіе 2-е. Москва, 1903. Цѣна 75 коп.

2. **Учебникъ прямолинейной тригонометріи.** Изданіе 4-е, соединенное съ **собраніемъ задачъ.** Москва, 1905. Цѣна 90 коп.

3. **Сборникъ геометрическихъ задачъ. Ч. I. (Планиметрія).** Изданіе 2-е. Москва, 1904. Цѣна 65 коп.

4. **Сборникъ геометрическихъ задачъ. Ч. II. (Стереометрія).** Изданіе 2-е. Москва, 1905. Цѣна 60 коп.

5. **Собраніе стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненія тригонометріи.** Изданіе 7-е. Москва, 1905. Цѣна 45 коп.

Складъ въ магазинѣ **„Сотрудникъ школъ“** А. К. Залѣсской
(Москва, Воздвиженка, д. Армандъ).